Definition eines (relativ vollständigen) formalen Systems konstruktiver Arithmetik

EDUARD WETTE*

GÖDELS Resultate (1931) [5] — die Unvollständigkeit formaler Systeme, die eine Arithmetik enthalten, und die Unableitbarkeit einer Aussage, die die Widerspruchsfreiheit des betreffenden formalen Systems in arithmetischer Verschlüsselung ausdrückt — reizen wegen der konstruktiven Art ihres Beweises zu der Aufgabe, die konstruktive Mathematik mit der klassischen Mathematik in einen Wettbewerb treten zu lassen, bei dem es darum geht, welche Art des Mathematisierens unter dem unparteiischen Gesichtspunkt der finiten Metamathematik HILBERTS [9] zu einem formalistisch feinmaschigeren Netz von Postulaten führt. GÖDELS Umdeutung einer Arithmetik mit berechenbaren Funktionalen (1958) [7] schafft einen neuen Zugang zu Widerspruchsfreiheitsbeweisen; dort wird in dem früher von GENTZEN (1936) [4] behandelten Fall der reinen Zahlentheorie mit primitiv rekursiven Funktionen endlichen Typs über natürlichen Zahlen gearbeitet, dafür aber ohne transfinite Ordinalzahlen und ohne logische Partikeln — von der vollständigen Induktion reicht eine direkte (beim Schritt von n auf $n + 1$ nicht auf eine Implikation reflektierende) Schlußweise aus, die von $\Phi(n) = \Phi(n + 1)$ zu $\Phi(1) = \Phi(m)$ übergeht.

Um auf konstruktiver Seite zu der eingangs genannten Aufgabe beizutragen, ist in erster Linie nach einer möglichst erschöpfenden Formalisierung jener Beweismethoden und Definitionsverfahren zu fahnden, die „über" Grundzahlen 0, 1, 2, ... verfügbar sind, ohne inhaltlich Zugeständnisse an die Vorstellung des Unendlichen als etwas wirklich Seienden zu machen (wie etwa in Theorien des Konstruierbaren, [8] 1.). Getreu einem umfassenderen, auch konstruktive Metatheorien einbeziehenden Plan, den ich 1957 in Amsterdam vorgetragen habe [21], soll die unter finite Kontrolle gebrachte Durchführung einer konstruktiven

* Professor BERNAYS bin ich zu Dank verpflichtet, weil er sich die Mühe gemacht hat, den größten Teil der detaillierten Ausführungen in der ersten Fassung dieser Arbeit zu überprüfen; seine Vorschläge zur Ergänzung und Abrundung, die er mir daraufhin mitteilte, habe ich bei der Überarbeitung zu berücksichtigen versucht. — Die Meinung des Referee hat mich bewogen, von einer mehr liberalen intuitionistischen Interpretation in der ersten Fassung zu einer strafferen dialogischen Deutung im Sinne von P. LORENZEN überzuwechseln.

Ordinalzahltheorie als Prüfstein für die Tragfähigkeit von formalen Systemen konstruktiver Arithmetik dienen. Das damals erwähnte Kodifikat einer normalen Sprache $\mathfrak{S}_1$ über Grundzahlen wird hier in verfeinerter Gestalt vorgelegt; es erscheint mir so weit vervollkommnet, daß man mit seiner Hilfe allein — ohne die gemäß [21] für diesen Zweck vorgesehenen höheren normalen Sprachschichten $\mathfrak{S}_\alpha$ — einen finit kontrollierten konstruktiven Wf.beweis für die nach BERNAYS und GÖDEL formalisierte axiomatische Mengenlehre [1, 2, 6] versuchen kann.[1] (Zur Einarbeitung in das Problem genügt, für jeden mengentheoretischen Deduktions-Stammbaum $d_\in$ nach Übersetzung in einen ordinalzahltheoretischen $d_<$, ähnlich der Konstruktion von TAKEUTI [19], einen passenden Bezirk $\mathrm{T}(d_<)$ von Ordinalzahlen, Typen und Funktionen aufzuzählen, der eine Umdeutung von $d_<$ löst, welche die erwähnte GÖDELsche Umdeutung in [7] auf Formeln mit transfinit rekursiv definierten Prädikaten erweitert.)

Die formalistische Aufarbeitung konstruktiver Intentionen ist im folgenden keine unnötige Zugabe (wie vom intuitionistischen Standpunkt aus, [8] 5.); vielmehr bildet sie in jedem Stadium der für eine Theorie über Ordinalzahlen erforderlichen Entwicklung konstruktiver Begriffsbildungen über Grundzahlen — Definition von Aussagen, Beweis von Implikationen — eine unentbehrliche Begleiterscheinung, die eben der Deutung selbst in wesentlichen Teilen überhaupt erst eine von imprädikativen Vorgriffen freie Konstruktivität verleiht.[2] Im Blickfeld eines so aus arithmetisch-kalkulatorischer Aktivität hervorgehenden Zugangs zur formalen Redeweise mit transfiniten Objekten (und über solche) ist es deshalb kaum noch als Opfer anzusehen, wenn wir uns metamathematisch ausdrücklich auf finite Schlußformen beschränken, die sich *direkt* — ohne Reflektieren auf Annahmen, die nicht bereits anschaulich zu verwirklichen sind — sicherstellen lassen.

Im Gegenteil: sollte der a priori ja nicht undenkbare Fall eintreten, daß uns eine Analyse des hier angesteuerten Wf.beweises unfreiwillig auch zur Herleitung „verkappter" Widersprüche im mengentheoretischen System anleitet — damit sind widersprechende Aussagen unter Verschlüsselungen gemeint, die nur nicht auf dem Wege systemgebundener Definitionen als intern falsch zu entschlüsseln sind — (oder gar zur Herleitung „unmittelbarer" Widersprüche), dann wäre dies ein Symptom für jenen leichten Zug ins Unwirkliche, der indirektem Schließen an-

---

[1] Ein Zwiegespräch mit GÖDEL, das sich am 22. September 1960 im Institute for Advanced Study zu Princeton entspann, ließ einen solchen Fall als nicht direkt unmöglich erscheinen. Ich danke Professor GÖDEL für seine Bereitschaft zu dieser Begegnung, die von CLIFFORD SPECTOR im Anschluß an den Stanford-Kongreß 1960 vermittelt worden war. Seiner freundlichen und unvoreingenommenen Aufforderung, meine Ansicht zu publizieren und sie dem unpersönlichen Urteil formaler Systeme zu unterwerfen, möchte ich hiermit nachkommen.

[2] Vergleiche [21], Etappe II (3. Absatz) und III (4. Absatz), mit [13] §§ 16, 17.

haftet; davon würde die klassische Denkart innerhalb des Systems gleichermaßen betroffen wie eine konstruktive außerhalb.

0.1 Neuere Literatur zeigt, daß die Einstellung zum Unendlichen als etwas möglich Werdendem noch recht unterschiedliche Ansichten von einer mathematischen Disziplin wie der Analysis reeller Zahlen erlaubt [12, 15]. Streitigkeiten über die Konstruktivität einer Behauptung möge ein dialogisches Kriterium schlichten, das LORENZEN [14] instruktiv auseinandergesetzt hat. Dadurch treten gewisse Diskrepanzen gegenüber der intuitionistischen Mathematik auf: im dialogischen Sinn können weder Auswahlprinzip noch „bar induction" allgemein verteidigt werden, da die beiden Diskussionspartner, die sich unter fest vereinbarten Rechten und Pflichten angreifen, mit verdeckten Karten um Beendigung und Gewinn ihrer Partie spielen.

Nicht eingeweihte Leser mögen die Abschnitte **0.11** bis **0.14** kursorisch vornehmen und Einzelheiten überschlagen.

0.11 Die Situation sei am Beispiel der bar-induktiv gefolgerten transfiniten Induktion $\bigwedge \varphi \bigvee \mathrm{x} \neg \varphi \mathrm{x}' \prec \varphi \mathrm{x} \rightarrow \bigwedge \pi (\bigwedge \mathrm{x}_0 (\bigwedge \mathrm{x} (\mathrm{x} \prec \mathrm{x}_0 \rightarrow \pi \mathrm{x}) \rightarrow \pi \mathrm{x}_0) \rightarrow \bigwedge \mathrm{x} \pi \mathrm{x})$ kurz vergegenwärtigt.[3] Der Opponent übernimmt für ein von ihm gewähltes, etwa primitiv rekursiv vorausgesetztes R anstelle $\prec$ die Kettenbedingung $\bigwedge \varphi *$ und dann, nach seiner Wahl eines P anstelle π, auch die R-Progressivität $\bigwedge x_0 *$ (für P); er bezweifelt $P m_0$ für ein von ihm ausgesuchtes m_0. Der Proponent wird nur im Glücksfall eine Strategie zum Gewinn von $P m_0$ wissen, und er beruft sich daher im allgemeinen auf die R-Progressivität in m_0 anstelle x_0; er hat nun die Verteidigung von $\bigwedge x (x R m_0 \rightarrow P x)$ zu übernehmen, während seinem Gegner die von $P m_0$ zufällt. Dieser wird, selbst wenn er eine Strategie kennt, die den Gewinn von $P m_0$ gewährleistet, $\bigwedge x (x R m_0 \rightarrow P x)$ für ein von ihm ausgesuchtes m_1 anstelle x angreifen, indem er $m_1 R m_0$ übernimmt und $P m_1$ bezweifelt; würde er $P m_0$ verteidigen, hätte er die Partie verloren. Das Spiel wiederholt sich mit m_1 anstelle m_0 und m_2 anstelle m_1, ..[4]; der Opponent hat bei der Lenkung seiner R-Vorgängerkette $.. m_2 R m_1 R m_0$ lediglich darauf zu achten, daß er nicht auf ein m_n stößt, für das er keinen R-Vorgänger mehr kennt. Sonst läuft er Gefahr, einen Bluff mit $m_{n+1} R m_n$ riskieren zu müssen, um seinen Angriff gegen $P m_n$ (und mit ihm die Partie) nicht aufzugeben — er hat aber keine Garantie, daß der Proponent jetzt oder später nicht $m_{n+1} R m_n$ angreift, statt nach neuen R-Progressivitäten zu fragen. Nach einem speziellen f anstelle φ wird der Proponent nur fragen, wenn er von einem groben Täuschungsversuch überzeugt ist; denn ihm fällt dann die Verteidigung von $f n_f' R f n_f$ zu, sobald der Opponent ein n_f genannt hat, für das dieser $\neg f n_f' R f n_f$ behauptet — und um da zu gewinnen, muß der Proponent erst einmal selbst fähig sein, $f n_f$ und $f n_f'$ auszuwerten.

Der Opponent kann, obwohl er sich offiziell nicht auf solche Fragen einzulassen braucht, dem Proponenten gestatten, „dasjenige" f anzugreifen, bei welchem der Wert von $f n$ seiner künftigen Wahl für m_n gleich sein wird. Er sagt ein N an und

---

[3] Von dieser Version der bar induction ging die Argumentation des Referee aus.

[4] Drei Punkte deuten unendlich viele, zwei Punkte endlich viele weitere Glieder an. Ein Punkt wird, wie $*$, $\dagger$, .., als Platzhalter für die verschiedensten Objekte benutzt. Man unterscheide '.' von '$\bullet$', den „dicken" Punkten, die in der inoffiziellen Notation (ab **1.61**) verwendet werden.

könnte entgegenkommenderweise sogar m_N verraten, auch wenn er keinen R-Vorgänger von m_N weiß. Greift nämlich der Proponent die R-Progressivität in m_N auf, so vermag er seinem Partner zwar Pm_N zuzuschieben — falls dieser die Induktionsannahme $\bigwedge x(x R m_N \rightarrow Px)$ nicht angreifen kann oder will —, aber damit ist der Proponent noch nicht in der Lage, seine zuletzt aufgestellte Behauptung Pm_{n_0} gegen den Zweifel des Gegners pflichtgemäß zu verteidigen. Er mag von m_N aus Pm für manche m gewinnen, die bezüglich R „höher" als m_N liegen; er mag dabei Pm für einige m durch vollständige Induktion gewinnen können; Pm_{n_0} wird er im allgemeinen nicht zu erreichen vermögen — er müßte R so beherrschen, daß er $\bigwedge \pi *$ nach einem Kalkül ableiten kann, dessen Regeln eine Herstellung von (rückwärts zu verfolgenden) Gewinnstrategien vermitteln, die gegen jeden Opponenten stichhaltig sind und die der Proponent überdies anzuwenden versteht.

Der Proponent wünscht eventuell, einen Dialog über Dialoge zu versuchen, und wendet ein, er *hätte* die Partie doch „an sich" nach $N - n_0$ Spielzyklen gewonnen, zumal wenn m_N nachweislich keinen R-Vorgänger hat, wenn der Gegner also, sobald er Pm_N anzweifelt, die Partie verliert. Der Opponent wird entgegnen, im Ernstfall *hätte* er m_n anders gelenkt — oft hat bereits m_{N-1} einen dazu geeigneten R-Vorgänger $\overline{m}_N$. Ein Proponent, der generell

$$\bigwedge \varphi(\bigvee x \neg \varphi x' R \varphi x \vee \bigwedge x \varphi x' R \varphi x)$$

behaupten will, verliert, da keine Strategie zum Gewinn von $A \vee \neg A$ vorhanden ist.

Vielleicht möchte sich der Proponent darauf berufen, es gäbe im Fall $\bigwedge \varphi \bigvee x \neg \varphi x' R \varphi x$ eine konstruktive Ordinalzahl $\varkappa$ mit der Eigenschaft, daß jedes m durch eine Ordinalzahl $\nu_R(m) = \mu \nu \bigwedge x(x R m \rightarrow \nu_R(x) < \nu)$ zu bewerten sei, die $< \varkappa$; danach könnten die Glieder jeder Folge φ gleichmäßig auf ihr Niveau $\nu_R(\varphi n)$ hin eingeschätzt werden. Der Opponent fragt dann — an Hand KLEENE l.c. [12] p. 192, 1955a (und l.c. [11] p. 527, 1944) — nach der Gödelnummer $k(\in O)$ eines solchen $\varkappa$ und nach der Bestimmung der Gödelnummern $k(m)$ von $\nu_R(m)$; ehe er sich jedoch auf einen endlosen Nebendialog über $k \in O$ einläßt, der ja beim Definitionsschritt O 3. durch Stichproben auf $\bigwedge n\{\Phi(l, n_O)$ definiert und $= l_n\}$ und auf $\bigwedge n\, l_n \in O \wedge \bigwedge n\, l_n <_O l_{n+1}$ zu immer neuen Nummern der Form $3 \cdot 5^l$ und damit zum Regreß in O 3. führen kann, wird er sich eine Herleitung von $k \in O$ vorlegen lassen und die benutzten Regeln auf ihre gewinnstrategische Relevanz prüfen.

Bei dieser Wendung wird folgendes einsichtig: eine induktive Definition ist im allgemeinen, auch wenn sie ein inklusions-isotones Definiens hat (wie die für $\in O$, $<_O$), dermaßen „offen", daß ihre formale Einführung in einen Kalkül dessen dialogische Relevanz aufhebt; denn die dialogische Definitheit einer solchen Definition ist nicht im voraus gesichert, etwa durch eine dialogisch schon gewonnene Vorgängerinduktion.

Nun kann der Proponent äußerlich nicht erkennen, wieviel Reflexionsstufen in einem Beweis der Vorgängerinduktion $\bigwedge \pi *$ bezüglich R stecken mögen; er wird also die ordinale Höhe $\nu_R = \mu \nu \bigwedge x \nu_R(x) < \nu$ von R im allgemeinen unterschätzen und der Opponent wird eine dialogisch relevante Herleitung von $\bigvee m\, \nu_R(m) = \varkappa$ anzugeben wissen. Ein Verteidiger der bar induction will überdies prinzipielle Gewißheit *vor* jeder Wahl von R haben (: [8] 6.) und tritt, sofern er sich auf dialogische Sinngebung einläßt, hic et nunc gegen jeden Gegner an — unabhängig von Ort und Zeit.

0.111 Man beachte, daß es wesentlich auf den Sinn von $\bigvee m$ ankommt, der in die Berechnungsschranke von $\Phi(l, n_O)$ eingeht. Bevor der reale Kern mengen-

theoretisch deduzierter Existenz nicht von einem Wf.beweis her geklärt und eingezäunt ist, halten wir uns hier an eine möglichst enge Existenzauslegung und fordern einen unmittelbaren Aufweis, der objektiver Entscheidung fähig ist, aber keiner Negation und auch keiner (indirekten) Reflexion.

Die konstruktiv deduzierte Existenz in der dialogischen Auslegung einer stets mit Gewinn zu verteidigenden Angabe wird zwar möglichst weit verfolgt, jedoch letztlich unter algorithmische Wörter-Rechnung gestellt (wie eine mengentheoretisch deduzierte Existenz). Und welches Wortspiel die „stärkeren" 'Existenzen' beinhaltet, läßt sich nicht ohne weiteres aus der ursprünglichen Deutung der Zeichen beurteilen. Die erste „nicht-konstruktive" Ordinalzahl kann unter deduktiver Relativierung $(: \mu\lambda \bigwedge k((\vdash_{\epsilon} k \in O) \rightarrow |k| < \lambda))$ dialogisch-konstruktiv zu erreichen sein. (Zugespitzt: schon ω_0 'existiert' ohne direkt zu existieren.)

0.12 Objektive Einigung erzielen die beiden Partner nur über „wahrheitsdefinite" Aussagen, für die ein direkt funktionierendes Entscheidungsverfahren festgelegt ist, dessen Ende durch Rückschritt vom Entscheid über ein Wort (d. i. eine normiert aufgebaute Zeichenreihe) auf eine feste Höchstzahl von Vorentscheidungen über seine Teilwörter zwangsläufig zuwege kommt — z. B. darüber, ob eine vorliegende Ableitung nach einem gegebenen Kalkül korrekt ist. Wie sich eine Partie über eine „beweisdefinite" Aussage entscheiden wird, z. B. über 'die Formel A ist nach dem Kalkül K ableitbar' $(: \vdash_K A)$, hängt bereits von den Vorkenntnissen des Proponenten ab, z. B. von Erfahrungen beim Ableiten nach K.

0.13 Vor Einführung einer induktiven Definition $Pm \leftrightarrow A(m, P)$ in einen Dialog ist deren dialogische Definitheit selbst zum Gegenstand des Dialogs zu machen. Um der Flucht in einen Regreß höherer Instanzen vorzubeugen, darf der Gegner objektive Auskunft über eine Fundierung verlangen, in bezug auf die P durch Vorgängerinduktion nach m mittels A definiert sein soll.

Es ist also nicht damit getan, daß der Verteidiger der Definition ein bereits definiertes Vorgängerprädikat R angibt, in bezug auf das er die Vorgängerinduktion $\bigwedge m_0(\bigwedge m(Rmm_0 \rightarrow D(m)) \rightarrow D(m_0)) \rightarrow \bigwedge m D(m)$ behauptet, um diese Behauptung ihrerseits dialogisch zu verteidigen. Denn die "Existenz" des einzuführenden Prädikats P ist aufgrund der in [14] festgesetzten Vereinbarungen über die dialogische Verwendung logischer Partikeln offenbar nicht zu gewinnen. Vielmehr müssen die Dialogpartner neue Verabredungen treffen und gut verteilte Rechte und Pflichten festlegen, ehe sie Dialoge mit noch zu definierenden Prädikaten austragen.

0.131 Einerseits darf der Angreifer verlangen, vorher zu sehen, wie die Vorgängerinduktion (bezüglich des vom Verteidiger angegebenen R) deduziert ist und nach welchen formalen Regeln; sonst kann er nicht beurteilen, ob er die Deduktion als Gewinnstrategie anerkennen muß oder ob er die Induktion bezweifeln soll. Andererseits ist zum Zeitpunkt der

Definition von R die Vorgängerinduktion für solche Eigenschaften, die konkret erst später erfaßt werden können oder die dann gar die Deutung von Prädikaten betreffen, die gerade in Einführung begriffen sein werden, — also für Eigenschaften wie "P ist in m dialogisch definit" — offenkundig nur abstrakt vorwegzunehmen, wenn man imprädikative Vorgriffe vermeiden will.

Nicht bloß dialogische Interessen, sondern auch Gründe der technisch einwandfreien Wiedergabe konstruktiver Inhalte zwingen uns demnach, ein formales System aufzustellen, das den (dialogisch-)konstruktiven Definitions- und Beweismöglichkeiten zum Zeitpunkt der Definition von R angepaßt ist und das abstrakte Prädikatmarken π, ρ, ... [4] mitführt, die selbst der Intention nach bedeutungsfrei sind — ähnlich den unbestimmten Rechenmarken in der Algebra — und die jederzeit für eine konkrete Metaüberlegung bereitstehen, soweit diese parallel zu einer fertig abgeleiteten formalen Deduktion abläuft.

Daß die Deutung nachher für ihre eigenen Definitheitseigenschaften auf solche Überlegungen unter Inanspruchnahme des zu deutenden formalen Systems angewiesen ist, zeugt von der innigen Verflechtung, die LORENZENS „operativer" Ansatz [13] zwischen den Fabrikaten eines Kalküls und dem mit ihnen gemeinten Sinn zustande gebracht hat. Steckt darin eine unentwirrbare Mixtur von Form und Inhalt? WEYL [27] S. 248 stimmt [13] zu. [13a] sucht den Begründungsanspruch abzustreiten. Um formalistisch unanfechtbar vorzugehen, fasse ich in **1.** alle Teilkodifikate zu einem Gesamtkodifikat zusammen und treibe dessen verbale Formalisierung bis zur gediegenen Kalkülisierung voran, die wohl keine Fehlanwendung mehr erlaubt. [5]

0.132 Mit der Wahl eines R, der Aufstellung eines dialogisch relevanten formalen Systems und dem Aufweis einer Deduktion

$$(1) \qquad \vdash \bigwedge x_0 (\bigwedge x (R\, x\, x_0 \rightarrow \rho\, x) \rightarrow \rho\, x_0) \rightarrow \rho\, x$$

haben wir noch keine Gewißheit, ob R die induktive Definition von P tatsächlich zu einer Definition durch Induktion macht, ob R also eine „passende" Fundierung ist, die sicherstellt, daß A in m_0 nur in solchen m vom zu definierenden P abhängt, die m_0 bezüglich R vorangehen. Wer die Definition von P angreift, ist berechtigt, auch darüber objektiv informiert zu werden; und wer die Definition verteidigt, ist darum ver-

---

[5] Ohne vorherige Kalkülisierung könnte bereits die Prädikatquantifikation gemäß **0.2** strittig sein, etwa hinsichtlich des Umfangs, in dem Parameter zulässig sind (s. **3.21**), ebenso der offizielle Status einer Umschreibung variabler und transfiniter Indizes; die Prädikatsubstitution in Definitionsschemata unter Hypothesen und Bedingungen ist ebenfalls nicht trivial. Sonst wäre auch kaum an die Durchführbarkeit der hier lediglich verbal angedeuteten „koerziblen" Perfektion $\mathfrak{S}_1^{\vee}$ des Systems $\mathfrak{S}_1$ zu denken, die auf eine systemgebundene transfinite Iteration von Chiffrierungen reflektiert (s. **0.52**). Aber schon bei $\mathfrak{S}_1$ dürfte eine verbale Formalisierung für Betrachtungen wie in **3.24** nicht voll ausreichen.

pflichtet, außer (1) noch eine (dialogisch relevante) formale Deduktion

(2) $\vdash \bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{R}\,\mathrm{x}\,\mathrm{x}_0 \rightarrow (\pi_1\,\mathrm{x} \leftrightarrow \pi_2\,\mathrm{x})) \rightarrow (\mathrm{A}(\mathrm{x}_0, \pi_1) \leftrightarrow \mathrm{A}(\mathrm{x}_0, \pi_2))$

aufzuweisen.

Nach Vorlage von (1) und (2) kann der Verteidiger behaupten, P sei für alle m dialogisch definit. Anhand (2) folgt: wenn das Definiendum P schon für alle m, für die Rmm_0, dialogisch definit ist, dann ist auch $A(m_0, P)$ dialogisch definit; denn wie sich P gegenüber seinem (m_0 vorangehenden) R-„Abschnitt" $P^{(R)}_{m_0}$ auch entwickeln mag, so steht P jedenfalls für m, für die Rmm_0, mit $P^{(R)}_{m_0}$ in der (dialogisch-konstruktiven) Bisubjunktion $\leftrightarrow$. Wird nun in diesem Stadium der Verhandlungen zwischen den Partnern vereinbart, Pm_0 als Abkürzung für $A(m_0, P^{(R)}_{m_0})$ einzuführen, dann ist die R-Progressivität für "P ist in m dialogisch definit" bei m_0 gewonnen. Und anhand (1) folgt mithin die Behauptung.[6]

0.133 Erst jetzt darf der Verteidiger der Definition von seinem Gegenspieler erwarten, daß dieser aufgrund der Erkenntnisse aus dem Metadialog anhand (1) und (2), den **0.132** latent enthält, folgenden zusätzlichen Dialogregelungen beistimmt: wird Pm_0 bezweifelt, so muß, wer Pm_0 behauptet hat, auch $A(m_0, P)$ behaupten; wer Pm_0 bezweifelt hat, muß später immer dann, wenn er Rmm_0 nicht angreift, seinerseits, je nach Fragerichtung des Partners, Pm mit $A(m, P)$ beantworten und umgekehrt, und er verliert, sobald er sich gezwungen sieht, selbst $A(m_0, P)$ zu behaupten.

0.134 Hegt der Opponent den Wunsch, den Dialog mittels Schrittzahlen zu verschärfen, so kommen als Schrittzahlen meines Ermessens allein natürliche Zahlen 1, 2, 3, ... in Betracht. Was hülfe es den Partnern, wenn ein transfinites Bewertungsverfahren des Proponenten aus endlichen Daten des Gegners errechnet, sie hätten beispielsweise von ω auf 10^{40} zurückzugreifen? — also, nach gegenwärtiger Lehre, auf die Größenordnung des Verhältnisses vom derzeitigen Weltalter zur (heutigen) Lichtzeit für den (heutigen) Elektronenradius-Weg.

Es sei betont, daß (1) kein allgemeines Verfahren liefert, das für „jede" Vorgängerkette von m_0 aus vorhersagt, nach wieviel Schritten sie abbricht; (1) gestattet im allgemeinen nicht einmal einen konstruktiven Schluß von $\bigvee m\, \bar{\varrho}\, m$ auf $\bigvee m_0(\bar{\varrho} m_0 \wedge \bigwedge m(\bar{\varrho} m \rightarrow \neg\, Rmm_0))$. Die Prozedur von **0.131** bis **0.133** legt eben nichts weiter fest als den dialogischen Sinn von Pm, nämlich den Ablauf gegenseitiger Widerlegungsversuche zweier Dialogpartner bei Behauptungen der Form Pm.

Ein auf derartige Weise (rekursiv, d.h. durch Induktion) definiertes Prädikat ist nicht mit einer Menge zu verwechseln, auf deren Elemente wie auf ein fertiges Ganzes reflektiert wird. Gewöhnlich steigern sich die Möglichkeiten, Pk für konstante Argumente k zu deduzieren, mit der Gewinnung oder der (dialogisch relevan-

---

[6] Das so eingeführte P hängt zunächst von R ab, ist aber bisubjunktiv unabhängig von der jeweiligen Fundierung R, wie Theorem 1 in **2.11** zeigt. Die korrekte Schreibweise für P, die **0.135** bringt, würde im Augenblick die Übersicht stören.

ten) Produktion neuer Definitions- und Beweismöglichkeiten, und ein nicht direkt zu entscheidendes Prädikat soll hier in seiner deduktiven Entfaltung begriffen werden.

0.135 Es empfiehlt sich, die neuen Verfügungen unter **0.131** bis **0.133** an ein eigenes Operationssignal zu knüpfen und anstelle P genauer $\overset{R}{\rightarrow} \pi x A(x, \pi)$ zu schreiben. Da, wo der „Rekursor" $\overset{*}{\rightarrow}$ die äußerste, nur vom Prädikatargument begleitete Operation bildet, setzt dann die metadialogische Offenlegung ein. Um die anschließende dialogische Verwendung von $\overset{R}{\rightarrow} \pi x A(x, \pi)$ ihrerseits wieder in formale Deduktionen einzubeziehen, gehen wir von (1) und (2) über zu

$$(3) \qquad \vdash \mathrm{A}(\mathrm{y}, \overset{\mathrm{R}}{\rightarrow} \pi\, \mathrm{x}\, \mathrm{A}) \leftrightarrow (\overset{\mathrm{R}}{\rightarrow} \pi\, \mathrm{x}\, \mathrm{A}\, \mathrm{y}).$$

Wohlgemerkt gehören (1), (2) formalistisch nicht ins Implikans eines Axioms, wo sie ins dialogische Wechselspiel geraten würden, sondern in die Prämissen eines Schlußschemas, weil sie dort finit-direkt abgeleitet sein wollen. Danach bleibt lediglich die Bestätigung übrig, daß die Konklusion dialogisch zu gewinnen ist.

0.14 Die komplizierteren Definitionen dieser (aufweislich) konstruktiv deduzierbar rekursiven Art, die eine ausbaufähige konstruktive Ordinalzahltheorie erfordert, sind ebenfalls nach obigem Muster dialogisch deutbar. Da wir aus metadialogischen Beweggründen aber ohnehin bestrebt sind, eine aktiv erzielte Gewinnstrategie mit einem formalen System einzuholen und einzufangen, lassen wir weitere Einzelheiten der dialogischen Deutung vorerst beiseite und wenden uns lieber dem dabei entstehenden formalen Gesamtsystem $\mathfrak{S}_1$ zu.

0.2 Verbal läßt sich $\mathfrak{S}_1$ im Rohbau so charakterisieren: es wird alles einkalkuliert, was der definitorische Übergang von (1), (2) zu (3) bei syntaktischer und deduktionstechnischer Abschließung in die intuitionistische Arithmetik hineinträgt. Der Vollständigkeitsgrad von $\mathfrak{S}_1$ erhöht sich beträchtlich, wenn der definitorische Übergang neben einer Argumentbedingung vor allem (beispielsweise im Hinblick auf das Deduktionstheorem) eine Definitionsvoraussetzung mitberücksichtigt und wenn Quantifikationen über denjenigen — aufzählbaren, aber unentscheidbaren — Prädikatbezirk einbezogen werden, welchen der Kalkül $\mathfrak{S}_1$ selbst produziert.

Es sei erneut hervorgehoben, daß metadialogische Anwendung einer formalen Deduktion mit freien Prädikatmarken den bedeutungsfreien Status der Marken nicht aufhebt und deswegen auch die Prädikatquantifikation nicht etwa imprädikativ beeinflußt. Der Unterschied zur dialogischen Verwendung der Grundzahlquantifikation [14] S. 27 ist bloß folgender: bei Wahlen von P ist damit zu rechnen, daß der Partner sich erkundigt, wieso P ein $\mathfrak{S}_1$-Fabrikat ist (während bei Wahlen von n kein Zweifel auftaucht, ob n Grundzahl ist).

$\mathfrak{S}_1$ macht dann nicht allein die Eigenschaften der natürlichen Ordnung zwischen konstanten Ordinalzahlen zugänglich,[7] sondern setzt sich quasi selbst transfinit fort, solange in transfinit rekursiven Definitionen die auf Ordinalzahlen angewandten Operatoren einer natürlichen Beschränkung $< \underset{+}{t}$ durch einen (im allgemeinen unbeschränkten) Ordinalzahlterm $\underset{+}{t}$ unterliegen. $\mathfrak{S}_1$ setzt sich über diese Fortsetzungsrichtung hinaus sogar typentheoretisch transfinit fort, jedenfalls soweit es quantorenfreie Aussageformen anbelangt.

0.21 Konstante Ordinalzahlen werden hier — ähnlich dem Ansatz in [21] (Etappe I, 1. Absatz, auch Fußnote 5) — durch Prädikatpaare PR dargestellt, für die

$$(0) \qquad \bigwedge x_0 (P x_0 \dot{\rightarrow} \bigwedge x (P x \dot{\rightarrow} R x x_0 \rightarrow \pi x) \rightarrow \pi x_0) \dot{\rightarrow} P x \rightarrow \pi x$$

in $\mathfrak{S}_1$ schon abgeleitet ist; als ständige Abkürzung für (0) dient $I(P, R; \pi, x)$. $I(P, R; \pi, x)$ drückt die Vorgängerinduktion *bei* der Bedingung P *bezüglich* R als Vorgängerprädikat (*für* π *nach* x) aus.

Nicht (0) selbst soll also repräsentativ für eine Ordinalzahl sein, son dern erst die direkte Vorlage einer formalen Deduktion $\vdash_{\mathfrak{S}_1} I(P, R; \pi, x)$

0.22 Zur Darstellung eines beschränkten Ordinalzahlterms genügt ein Prädikat*form*paar $P(z_1, ..)\, R(z_1, ..)$, für das

$$\vdash I(P(z_1, ..), R(z_1, ..); \pi, x)$$

in $\mathfrak{S}_1$ gilt. Wesentlich ist dabei, daß die Deduktion für formale Variable $z_1, ..$ erfolgt und nicht etwa für „jedes" einzelne $z_1, ..$; halbformale Regeln, die auf inhaltliche Einsicht hin den Schluß von z auf z ziehen wollen, sind hier nicht zugelassen, da man sie vom finiten Standpunkt aus nicht kontrollieren kann. Jedoch darf die Deduktion für $z_1, ..$ bereits abgeleitete Vorgängerinduktionen anwenden, die andere $P_0\, R_0$ betreffen.

0.23 Zur Darstellung eines unbeschränkten Ordinalzahlterms wird ein Prädikat*schema*paar $P(\pi_1, ..)\, R(\rho_1, ..)$ herangezogen, für das die Vorgängerinduktion bei $P(\pi_1, ..)$ bezüglich $R(\rho_1, ..)$ aus den hypothetisch angesetzten Vorgängerinduktionen bei π_1 bez. $\rho_1, ..$ in $\mathfrak{S}_1$ relativ deduziert ist.

0.24 Bringt man auch noch die geschlossene Vorgängerinduktion

$$(\hat{0}) \qquad \bigwedge \pi \bigwedge x\, I(P, R; \pi, x)$$

bei P bezüglich R, mit Prädikatmarken $\pi\, \rho$ anstelle PR, in den hypothetischen Ansatz von Definitionen, so stellt das *unter* dieser Hypothese durch eine 0-stellige Prädikatmarke relativ explizit definierte Prädikat-

[7] Vgl. [21], S. 270.

schema ein (transfinites) Primaussageschema $\underset{+}{\pi}\alpha$ über Ordinalzahlen dar. Als ständige Abkürzung für $(\hat{0})$ wird $\mathrm{I}(\mathrm{P}, \mathrm{R})$ gebraucht.

0.25 Zwar sieht $\mathfrak{S}_1$ allein Prädikatmarken erster Ordnung über Grundzahltupeln festen Typs vor (und keinerlei Prädikatmarken über Prädikatmarken), aber auf dem Wege formaler rekursiver Definitionen über Grundzahlen bietet das hier finit definierte Instrument genügend Handhaben, um nicht nur beschränkte transfinite Terme höheren Typs und entsprechende Termmarken einzuführen, sondern auch Prädikatformen und -schemata über Ordinalzahlen darzustellen, in denen unbeschränkte transfinite Terme und Termmarken vorkommen, deren Typen transfinite Ordnung erreichen, sei der Typ respektive die Ordnung nun konstant, beschränkt variabel oder markenmäßig unbestimmt, und mögen gar die Typen selbst erst mit beschränkt aufgebauten Typschemata transfinit rekursiv definiert sein.

0.3 Was schließlich die, der Etappe I des Amsterdamer Plans entsprechend mittels Niveauvergleich innerhalb $\mathfrak{S}_1$ definierte natürliche Halbwohlordnung $\leq$ zwischen Ordinalzahlrepräsentanten anlangt, so ist konstruktiv eine „halb"stabilisierende formale Übersetzung $^{\frown}$ vorzunehmen, bei der die Prädikate zur Ordinalzahl- und Termrepräsentation keine Abschwächung erleiden dürfen. $\overset{\frown}{\leq}$ ist dann reflexiv, transitiv und schwach konnektiv.

Daß allein $\vdash \mathrm{I}(\mathrm{P}, \mathrm{R}; \pi, \mathrm{x})$ ein Prädikatpaar PR zum Ordinalzahlrepräsentanten stempelt, also R „auf" P keinerlei Eigenschaften totaler oder partieller Ordnungen unterliegt, bewirkt eine gründliche Auffüllung der „Klasse" ordnungsisomorpher Wohlordnungen, die in der naiven Mengenlehre eine Ordinalzahl darstellt. Diese Auffüllung ist nützlich zur Ermittlung der ordinalen Höhe[8] verschiedenster Objekte: ob es sich nun um Definitionsfundierungen handelt, die ja i.a. weder transitiv noch unverzweigt sind, oder um fächerartige Typen (oder, für etwaige Reflexionen auf $\mathfrak{S}_1$ selbst, um chiffrierte Formen deduktiver Stammbäume).

Für die unbeschränkte transfinite Induktion

$$(\underset{+}{0}) \qquad \bigwedge\alpha_0(\bigwedge\alpha(\alpha < \alpha_0 \rightarrow \underset{+}{\pi}\alpha) \rightarrow \underset{+}{\pi}\alpha_0) \rightarrow \underset{+}{\pi}\alpha$$

ist in $\mathfrak{S}_1$ zwar allgemein keine Übersetzung mit $\pi\rho$ unter $\mathrm{I}(\pi, \rho)$, $\pi_0\rho_0$ unter $\mathrm{I}(\pi_0, \rho_0)$, .. als Vertreter der α, α_0, .. abzuleiten, wohl aber eine solche für die unbeschränkte schwache transfinite Induktion, die aus $(\underset{+}{0})$ durch Einsetzung von $\neg\neg\underset{+}{\pi}$ anstelle von $\underset{+}{\pi}$ entsteht. Daraus kann für „stabile" Aussageformen $\underset{+}{\mathrm{A}}(\alpha)$ über Ordinalzahlen, für die $\neg\neg\underset{+}{\mathrm{A}}(\alpha) \rightarrow \underset{+}{\mathrm{A}}(\alpha)$ abgeleitet ist — sehr viele lassen sich in $\mathfrak{S}_1$, von $\overset{\frown}{\leq}$ ausgehend, darstellen —, der Induktionssatz

$$\bigwedge\alpha_0(\bigwedge\alpha(\alpha < \alpha_0 \rightarrow \underset{+}{\mathrm{A}}(\alpha)) \rightarrow \underset{+}{\mathrm{A}}(\alpha_0)) \rightarrow \underset{+}{\mathrm{A}}(\alpha)$$

---

[8] Vgl. dazu den letzten Absatz unter **0.11**.

kopiert werden, aus dem wieder Kopien mit der Induktionsfolgerung $\underset{+}{A}(\underset{+}{t})$ anstelle $\underset{+}{A}(\alpha)$ entspringen. (Im transfiniten Term $\underset{+}{t}$ dürfen dabei hochtypige Argumente vorkommen, nur der $\underset{+}{t}$-Wert soll vom tiefsten nichtleeren Typ sein, also bei Spezialisierung der Argumente in $\underset{+}{t}$ Ordinalzahlen liefern.)

0.31 Angesichts einer dermaßen vielseitigen Abrundung nenne ich $\mathfrak{S}_1$ lieber normale „Sphäre" über Grundzahlen (statt „Sprachschicht").

0.4 Im Unterschied zur Theorie der rekursiven Funktionen, wo das Phänomen der Rekursivität aus der Definition rekursiver Funktionen entfernt und auf die Anwendung der Definition verschoben wird ([11], p. 274), soll hier der Versuch gemacht werden, das konstruktive Prinzip selbst, nach dem man Definitionen und Beweise durch Induktion bildet, in einer möglichst ergiebigen Weise formal zu fixieren. Die kalkulatorisch vorgenommene Auswahl aus den formal durch keine (rekursive) Aufzählung auszuschöpfenden Möglichkeiten, Definitionen ohne unendlichen Regreß zu erfinden und Beweise durch vollständige Induktion zu führen, ist in ihrer Konzeption auf das Zustandebringen von Fortsetzungs- und Abschließungseigenschaften gerichtet.

Die Stärke des formalen Systems $\mathfrak{S}_1$ beruht grundsätzlich in seiner konsequenten Beschränkung auf Einsichten, die selbst erst aus dem Operieren mit Figuren nach Systemen von Regeln gewonnen worden sind, also in der Kodifizierung jener Hinwendung „zu den Sachen selber", die den Mathematiker meist als zu schwach anmuten.

0.5 Wer harte Formeldressur nicht scheut, kann $\mathfrak{S}_1$ im wesentlichen auf zweierlei Weise überspielen, ohne dabei den Bereich des einwandfrei operativ-dialogisch Deutbaren zu verlassen.

0.51 Ausgehend von einem $\mathfrak{S}_1$ umgreifenden Figurbezirk konstruiere man zunächst $\mathfrak{S}_2$, und zwar derart, daß $\mathfrak{S}_1$ einerseits in $\mathfrak{S}_2$ mit bedingten Operatoren reproduzierbar ist und daß $\mathfrak{S}_1$ andererseits in $\mathfrak{S}_2$ aus einer (etwa primitiv rekursiven) Numerierung von $\mathfrak{S}_1$ auch formal völlig entschlüsselt werden kann. Iteriert man diese normale Sprachkonstruktion transfinit, solange Ordinalzahlen, die bereits deduktiv erreicht sind, als Iterationsindizes zur Verfügung stehen, so gelangt man (wie [21] S. 271) bis zu Regionen endlicher Höhe, welche die $\mathfrak{S}_\alpha$ mit α aus der vorangehenden Region bündeln. σ_α bezeichne wieder den Limes der in $\mathfrak{S}_\alpha$ erreichbaren Ordinalzahlen; die kritischen Stellen der Iteration, wo $\sigma_\alpha = \alpha$, lassen sich dann durch Einfädelung von Ordinalzahlmarken μ überwinden [9]. Und die Zufuhr von Ordinalzahlmarken kann ihrerseits noch gestaffelt werden.

Wer nur an der Ausdehnung des Ordinalzahlgegenstandes interessiert ist, mag Quantifikation, Induktion und Rekursion über die in $\mathfrak{S}_1 \rightleftharpoons {}^*\mathfrak{S}_1/\sigma_0^*$ erreichten (und darin bereits schwach wohlgeordneten) Ordinalzahlen $< \sigma_1$ zu $\mathfrak{S}_1$ hinzufügen;

---

[9] Ordinalzahlmarken μ werden, genau wie unbeschränkte Ordinalzahlvariablen α, durch Markenpaare $\pi\rho$ dargestellt. Zur Unterscheidung hat man vorher in den so verwendeten $\pi\rho$ die Unterscheidungsindizes für μ gegenüber denen für α auszuzeichnen.

er erhält so $*\mathfrak{S}_1/\sigma_1 \rightleftharpoons *\mathfrak{S}_1/\sigma_1^*$ und daraufhin (wie [22]) die erste *expansible* Sprachschicht $*\mathfrak{S}_1/\sigma_\alpha^*$ über sich erweiternden Ordinalzahlabschnitten $< \sigma_\alpha^*$, welche jeweils einen transfinit fortsetzbaren Sektor aus $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ loslöst.

0.52 Wer $\mathfrak{S}_1$ vorerst lieber nach „innen" engmaschiger auszuarbeiten wünscht, wird eine Verschlüsselung $\ulcorner . \urcorner \leftrightharpoons \mathrm{cf}_0$ von $\mathfrak{S}_1$ zur Definition eines Reflexionsprinzips benutzen, das $\mathfrak{S}_1 \rightleftharpoons \mathfrak{S}_1^0$ zu $\mathfrak{S}_1^1$ ergänzt; dieses Prinzip reflektiert auf chiffrierte Deduktionsformen, um dechiffrierte Aussageformen zu folgern:

$$\vdash_{\mathfrak{S}_1^1} \bigvee \mathrm{z}\ \mathrm{dd}_{\mathfrak{S}_1^0}(\mathrm{z}, \mathrm{cf}_0\, \mathrm{P0}^{(\mathrm{x})}) \rightarrow \mathrm{P}\,\mathrm{x}.$$

Wer den Kode cf_0, $\mathrm{dd}_{\mathfrak{S}_1^0}$ kennt, kann für jedes m anstelle x aus dem vom Dialogpartner anzugebenden n anstelle z eine Deduktion für Pm in $\mathfrak{S}_1^0$ entnehmen; der Partner braucht die Entzifferung von cf_0 nicht zu beherrschen.

$\mathfrak{S}_1^1$ leistet zwar keine Entschlüsselung der Chiffrierung cf_0 (wie $\mathfrak{S}_2$ es tut), sorgt aber für eine bescheidene formale Ausschöpfung der unendlichen Induktion $\Rightarrow_n Pn \dot{\Rightarrow} P\mathrm{x}$.

Durch transfinit iterierte Anwendung des Reflexionsprinzips auf schon durch Reflexion erzielte Ergänzungen von $\mathfrak{S}_1$ entwickelt sich, nach Maßgabe bereits erreichter Iterationsindizes, eine weitgehende Verdichtung von $\mathfrak{S}_1$:

$$\vdash_{\mathfrak{S}_1^{\backslash\bullet}} \mathrm{I}(\pi, \rho) \dot{\rightarrow} \bigwedge \mathrm{x} \bigvee \mathrm{z}\ \mathrm{dd}_{\mathfrak{S}_1^{\pi\rho}}(\mathrm{z}, \mathrm{cf}_{\pi\rho}\, \mathrm{P0}^{(\mathrm{x})}) \rightarrow \mathrm{P}\,\mathrm{x}.$$

Ein derartiger Vervollkommnungsprozeß holt die chiffrierenden Prädikate cf_α und $\mathrm{dd}_{\mathfrak{S}_1^\alpha}$, bis auf die von außen per definitionem zugeführte Erstverschlüsselung $\ulcorner . \urcorner \leftrightharpoons \mathrm{cf}_0$, aus $\mathfrak{S}_1$, wo sie einheitlich in π, ρ unter $\mathrm{I}(\pi, \rho)$ ausdrückbar sind.

$\mathfrak{S}_1^{\backslash\bullet}$ wird also (bis auf den Verschlüsselungsanfang und das Entschlüsselungsende) gewissermaßen noch von $\mathfrak{S}_1$ umspannt. $\mathfrak{S}_1^{\backslash\bullet}$ heiße darum auch die *koerzible Perfektion* von $\mathfrak{S}_1$.

0.6 Um die Handhabung des als kanonisches System (Post) aufgestellten Regelwerks $\mathfrak{S}_1$ nicht vorzeitig mit der intendierten Deutung zu verquicken, kommen wir auf diese erst unter **1.5*** zurück; und den Anschluß an die gebräuchliche Notationsweise finden wir bloß noch inoffiziell unter **1.6**** wieder. In **1.632** lernen wir dabei verbal die Art der ausgewählten (relativen und bedingten) rekursiven Definitionen ihrer Syntax nach genauer kennen. Zum konstruktiven Inhalt der Deduktionstechnik wird unter **1.63*** nachgetragen, was über **0.13*** hinausgeht.

Das Hauptgewicht der Darlegung ruht angesichts der unter **3.**** erörterten Spannweite von $\mathfrak{S}_1$ auf der minuziösen Detailarbeit in den Abschnitten **1.*****. Unter **2.***** wird in knapper, aber (bei einigen metamathematischen Vorkenntnissen) einwandfrei kontrollierbarer Form ein Kernstück der Deduktionsmöglichkeiten in diesem System der konstruktiven Arithmetik vorgeführt.

1. Konstitution des Kalküls

Zur Vorbereitung der Definition für die erste normale Sphäre über Grundzahlen stellen wir einige Verabredungen zusammen.

Ist ein endliches Alphabet $\boldsymbol{\alpha}$ aus $k_0 (> 0)$ Konstanten $\mathrm{c}_1, .., \mathrm{c}_{k_0}$ und aus $k_n (\geq 0)$ n-stelligen Funktoren ${}^n\mathrm{f}_1, .., {}^n\mathrm{f}_{k_n}$ $(n = 1, .., m; m > 0)$ gegeben, so seien Wörter w hergestellt nach den Regeln

$$\begin{array}{rll} & \rightarrow {}_w\mathrm{c}_l & (l = 1, .., k_0) \\ {}_w\mathrm{w}_1, .., {}_w\mathrm{w}_n & \rightarrow {}_w{}^n\mathrm{f}_l\, \mathrm{w}_1 .. \mathrm{w}_n & (l = 1, .., k_n; n = 1, .., m). \end{array}$$

Zu „verstehen" sind dabei $\rightarrow$ als Imperativ "aus .,..,. bilde .", die Kommata als Partition der Prämissen, die w als Mitteilung für schon hergestellte Wörter, ${}_w\mathrm{w}$ als "w ist Wort".

Ergänzen wir $\boldsymbol{\alpha}$ durch $k_0' (> 0)$ Wortvariable $\mathrm{o}_1, .., \mathrm{o}_{k_0'}$, so seien Wortterme t gebildet gemäß

$$\begin{array}{rll} & \rightarrow {}_{*w}\mathrm{o}_l & (l = 1, .., k_0') \\ & \rightarrow {}_{*w}\mathrm{c}_l & (l = 1, .., k_0) \\ {}_{*w}\mathrm{t}_1, .., {}_{*w}\mathrm{t}_n & \rightarrow {}_{*w}{}^n\mathrm{f}_l\, \mathrm{t}_1 .. \mathrm{t}_n & (l = 1, .., k_n; n = 1, .., m). \end{array}$$

Die t sind als Mitteilung für schon gebildete Wortterme zu verstehen, ${}_{*w}\mathrm{t}$ als "t ist Wortterm". Aus t entstehen durch Substitution von w_l für die o_l in t immer wieder Wörter.

Ergänzen wir $\boldsymbol{\alpha}$ durch k_0' Wortvariable und durch $k_n' (\geq 0)$ n-stellige Relatoren ${}^n\mathrm{r}_1, .., {}^n\mathrm{r}_{k_n'}$ $(n = 1, .., m'; m' > 0)$ zu $\boldsymbol{\alpha}'$, so seien Formeln W gebildet gemäß

$$ {}_{*w}\mathrm{t}_1, .., {}_{*w}\mathrm{t}_n \rightarrow {}_W{}^n\mathrm{r}_l\, \mathrm{t}_1 .. \mathrm{t}_n \qquad (l = 1, .., k_n'; n = 1, .., m'). $$

${}_W\mathrm{W}$ lies "W ist Formel (Wort über Wörter)", wo W schon gebildete Formeln mitteilt. Aus jedem W ist eindeutig zu entnehmen, welche t dem Relator folgen; ebenso aus jedem t und aus jedem w, welche Wortterme beziehungsweise welche Wörter zu den Funktoren in t bzw. in w gehören — klammerfreie Łukasiewicz-Notation.

1.1 Spezifikation. Wir nehmen nun $k_0 = 7, k_1 = 1, k_2 = 7, k_0' = 19, k_1' = 4, k_2' = 9, k_3' = 1, k_4' = 1$ und für c_l speziell $\circ$, 0, ξ, Π, $\leq$, $\vee$, $\wedge$, für ${}^1\mathrm{f}_l$, ${}^2\mathrm{f}_l$ speziell $'$ bzw. $^{\cup}$, $\rightarrow$, $^{\wedge}$, $^{\vee}$, $\wedge$, $\wedge$, $\rightarrow$ für ${}^1\mathrm{r}_l$, ${}^2\mathrm{r}_l$, ${}^3\mathrm{r}_l$, ${}^4\mathrm{r}_l$ speziell k, x, ${}^*k$, A bzw. $\neq$, 2, π, ${}_{\cup}{}^*k$, $\not\leq$, ${}_{\cup}x$, P, $\angle$, $\leftrightarrows$ bzw. $+$ bzw. $\|$. Die 7 Konstanten stehen auf der Zeile, die 8 Funktoren sind hoch gestellt und, vom einstelligen $'$ abgesehen, zweistellig, so daß die Wortbestandteile sich augenfällig wiederfinden lassen. Die 15 Relatoren sind tief gestellt und teils keine Primfiguren, sondern mnemotechnisch zusammengesetzt — im Hinblick auf die später intendierte Deutung, die aber ja nicht verstanden

zu werden braucht. (Da jede Formel W mit einem einzigen Relator beginnt, ist beim Lesen unterhalb der Zeile klar, wo er endet. Wer die Stellenzahl der einzelnen Relatoren vergessen hat, kann sich an die Zahl der Wörter halten, die dem jeweiligen Relator folgen. Die Stellenzahl der Funktoren sollte man allerdings wissen.[10])

Zu verstehen sind in den nachfolgend postulierten Regeln von der Form $W_1, .., W_k \rightarrow W$, wobei $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 27$ sein wird, außer "$\rightarrow$" und "," noch die 19 Wortvariablen "o_l", nämlich als Mitteilung für Wörter, die den speziellen 7 Konstanten und 1 + 7 Funktoren entspringen: anstelle $o_1, .., o_{19}$ seien darum $w, w_1, .., w_5$, $v, v_1, .., v_5$, $u, u_1, .., u_6$ zur Mitteilung solcher Wörter in den Worttermen t (innerhalb der Formeln W) benutzt.

1.2 Technische Vorbemerkungen. Um Regeln mit denselben Prämissen zusammenzuziehen, wird statt '$W_1, .., W_k \rightarrow W^1; .. ; W_1, .., W_k \rightarrow W^l$' kurz '$W_1, .., W_k \rightarrow W^1, .., W^l$' notiert; die rechts vom Imperativ auftretenden, als Partition der Konklusionen zu verstehenden Kommata stehen damit eine Reflexionsstufe höher als die (bisherigen) Kommata links vom Imperativ. Bei Regeln, die nicht in eine Zeile passen, seien aufeinanderfolgende Zeilen dadurch verbunden, daß das Zeichen am Zeilenende am nächsten Zeilenanfang wiederholt wird. Regeln (einschließlich Bezifferung) sind durch ';', Regelgruppen durch ';;' getrennt.

Prämissen, die entbehrlich waren, obwohl sie der Eindämmung überflüssiger Produktionen dienlich gewesen wären, sind — namentlich bei den Relatoren $\not\vdash$, $\|$ — weggelassen. Entbehrliche Prämissen sind — damit die Regelzahl, die jetzt = 98, nicht > 100 ansteige — auch dann nicht beibehalten worden, wenn dabei (wie bei den nachstehenden Regeln 8.2.1, 2, 12, 8.1.9, 10, 13, 11 und 10.1) in der Konklusion „lose" Wortmitteilungen eintreten, die nicht in der Weise gekoppelt sind, daß sie in einer der zugehörigen Prämissen vorkommen. Eine Neufassung des Kalküls $\mathfrak{S}_1$ ohne lose Wortmitteilungen würde gestatten, mit „Ur"mitteilungen zu arbeiten, die irgendein (ununterbrochenes) „Stück" aus einer schon produzierten Figur bezeichnen, statt, wie hier, die Mitteilungen u, v, w, .. auf einen vorher spezifizierten Wortbegriff zu beziehen. Mit genau 130 Regeln läßt sich diese Neufassung überdies so anlegen, daß im entscheidbaren Teil des Kalküls 1. jede Urmitteilung in den Prämissen einer Regel auch in der Konklusion vorkommt und 2. jede den Konklusionsrelator enthaltende Prämisse kürzer als die Konklusion ausfällt.

1.3 Der pure Kalkül. Doch will ich jetzt ohne Umschweife die Regeln des Sphärenkalküls $\mathfrak{S}_1$ in ihrer optisch knappsten Fassung präsentieren.

Anmerkung. Der Leser mache sich mit dem (später entstandenen) Zusatz S. 193 f. vertraut, wonach in 9.1.5 genauer ${}_{-A}u$ statt ${}_{A}u$ steht und für ${}_{-A}$ bloß **9**.4.1 — 6, d. i. 9.2.1 — 6 mit ${}_{-A}$ anstelle ${}_{A}$, benutzt wird. Da diese Modifikation fortan unschwer zu verfolgen ist, kann sie im Text unberücksichtigt bleiben.

---

10 Dies wäre nicht nötig bei der am Schluß von **1.2** erwähnten Version von $\mathfrak{S}_1$.

0.1 $\rightarrow {}_k 0$; 0.2 ${}_k w \rightarrow {}_k' w$;

1.1, 2 ${}_k w \rightarrow {}_{\neq} 0' w$, ${}_{\neq}' w 0$; 1.3 ${}_{\neq} v w \rightarrow {}_{\neq}' v' w$;

2.1 $\rightarrow {}_2 00$; 2.2 ${}_2 v w \rightarrow {}_2' v'' w$;

3. ${}_k w \rightarrow {}_x{}^{\cup}\xi w$; 4. ${}_k v, {}_k w \rightarrow {}_{\pi} v {}^{\cup\cup} v \Pi w$;

5.1 $\rightarrow {}_{*k} 0$; 5.2 ${}_{*k} w \rightarrow {}_{*k}' w$; 5.3 ${}_x w \rightarrow {}_{*k} w$;

6.1 $\rightarrow {}_{\cup *k} 0 \circ$; 6.2 ${}_{*k} v, {}_{\cup *k} w u \rightarrow {}_{\cup *k}' w {}^{\cup} u v$;

7.1 ${}_{\cup *k} w u \rightarrow {}_{+} u \circ u$; 7.2 ${}_{*k} v, {}_{+} u_1 u_2 u \rightarrow {}_{+} u_1 {}^{\cup} u_2 v {}^{\cup} u v$;

8.1.1 ${}_{\neq} v w \rightarrow {}_{\not\perp}{}^{\cup}\xi v {}^{\cup}\xi w$;

8.1.2 ${}_x w \rightarrow {}_{\not\perp} w \circ$; [8.1.0 ${}_{\not\perp} w u, {}_{\not\perp} w v \rightarrow {}_{\not\perp} w {}^{\cup} u v$];

8.3.1 $\rightarrow {}_{\cup x} 0 \circ$; 8.3.2 ${}_x v$, ${}_{\not\perp} v u$, ${}_{\cup x} w u \rightarrow {}_{\cup x}' w {}^{\cup} u v$;

8.1.3 ${}_x w \rightarrow {}_{\not\perp} w 0$;

8.2.1 ${}_x v \rightarrow {}_{\parallel} v v v_1 v_1$; 8.2.2 ${}_{\not\perp} v u \rightarrow {}_{\parallel} v u v_1 u$;

8.2.3 ${}_{\parallel} v u v_1 u_1 \rightarrow {}_{\parallel} v' u v_1' u_1$;

8.1.8 ${}_{\not\perp} v v_1$, ${}_{\parallel} v u v_1 u \rightarrow {}_{\not\perp} v u$;

8.2.4 ${}_{\parallel} w u w_1 u_1$, ${}_{\parallel} w v w_1 v_1 \rightarrow {}_{\parallel} w {}^{\cup} u v w_1 {}^{\cup} u_1 v_1$;

8.1.4, 5, 6, 7 ${}_x w \rightarrow {}_{\not\perp} w \Pi$, ${}_{\not\perp} w \leq$, ${}_{\not\perp} w \vee$, ${}_{\not\perp} w \wedge$;

8.2.5, 6, 7 ${}_{\parallel} w u w_1 u_1$, ${}_{\parallel} w v w_1 v_1 \rightarrow {}_{\parallel} w {}^{\rightarrow} u v w_1 {}^{\rightarrow} u_1 v_1$, ${}_{\parallel} w {}^{\wedge} u v w_1 {}^{\wedge} u_1 v_1$,
, ${}_{\parallel} w {}^{\vee} u v w_1 {}^{\vee} u_1 v_1$;

8.1.9, 10 $\rightarrow {}_{\not\perp} v {}^{\vee} v u$, ${}_{\not\perp} v {}^{\wedge} v u$;

8.2.9, 10 ${}_{\not\perp} v w_1$, ${}_{\not\perp} v w$, ${}_{\parallel} w u w_1 u_1 \rightarrow {}_{\parallel} w {}^{\vee} v u w_1 {}^{\vee} v u_1$, ${}_{\parallel} w {}^{\wedge} v u w_1 {}^{\wedge} v u_1$;

8.1.12 ${}_{\not\perp} v u$, ${}_{\not\perp} w u \rightarrow {}_{\not\perp}{}^{\cup} v w u$; 8.1.13 $\rightarrow {}_{\not\perp} \circ u$;

8.1.16 ${}_{\neq} w_1 w_2$, ${}_{\pi} w_1 u$, ${}_{\pi} w_2 v \rightarrow {}_{\not\perp} u v$;

8.1.17 ${}_k v$, ${}_{\neq} w_1 w_2 \rightarrow {}_{\not\perp}{}^{\cup\cup} v \Pi w_1 {}^{\cup\cup} v \Pi w_2$;

8.1.18, 19, 20, 21, 22, 23 ${}_{\pi} w v \rightarrow {}_{\not\perp} v \circ$, ${}_{\not\perp} v 0$, ${}_{\not\perp} v \xi$, ${}_{\not\perp} v \leq$, ${}_{\not\perp} v \vee$, ${}_{\not\perp} v \wedge$;

8.2.12 ${}_{\pi} w v \rightarrow {}_{\parallel} v v v_1 v_1$;

8.2.8 ${}_{\parallel} v u v_1 u_1$, ${}_{\parallel} w u_1 w_1 u_2 \rightarrow {}_{\parallel}{}^{\cup} v w u {}^{\cup} v_1 w_1 u_2$;

8.1.11 $\rightarrow {}_{\not\perp} v {}^{\rightarrow} v u$; 8.2.11 ${}_{\not\perp} v w_1$, ${}_{\not\perp} v w$, ${}_{\parallel} w u w_1 u_1 \rightarrow {}_{\parallel} w {}^{\rightarrow} v u w_1 {}^{\rightarrow} v u_1$;

8.1.14, 15 ${}_{\not\perp}{}^{\cup} v w u \rightarrow {}_{\not\perp} v u$, ${}_{\not\perp} w u$;

9.1.1 $\rightarrow {}_P{}'' 0 \leq$; 9.1.2, 3 ${}_k w \rightarrow {}_P w \vee$, ${}_P w \wedge$; 9.1.4 ${}_{\pi} w u \rightarrow {}_P w u$;

9.2.1 ${}_{\cup *k} w v$, ${}_P w u \rightarrow {}_A{}^{\cup} u v$; 9.2.2, 3, 4 ${}_A u$, ${}_A v \rightarrow {}_A{}^{\rightarrow} u v$, ${}_A{}^{\wedge} u v$, ${}_A{}^{\vee} u v$;

9.3.1 ${}_{\angle}uw,\ {}_{\angle}wv \to {}_{\angle}uv$; 9.3.2, 11, 12 ${}_{A}u \to {}_{\angle}uu,\ {}_{\angle}{}^{\cup}\wedge\circ u,\ {}_{\angle}u{}^{\cup}\vee\circ$;

9.3.3, 4, 6, 7 ${}_{A}u,\ {}_{A}v \to {}_{\angle}{}^{\wedge}uvu,\ {}_{\angle}{}^{\wedge}uvv,\ {}_{\angle}u{}^{\vee}uv,\ {}_{\angle}v{}^{\vee}uv$;

9.3.5 ${}_{\angle}wu,\ {}_{\angle}wv \to {}_{\angle}w{}^{\wedge}uv$; 9.3.8 ${}_{\angle}uw,\ {}_{\angle}vw \to {}_{\angle}{}^{\vee}uvw$;

9.3.9 ${}_{\angle}{}^{\wedge}wuv \to {}_{\angle}w{}^{\rightarrow}uv$; 9.3.10 ${}_{\angle}w{}^{\rightarrow}uv \to {}_{\angle}{}^{\wedge}wuv$;

9.3.17, 18 ${}_{\cup *k}{}'wv \to {}_{\angle}{}^{\cup}\vee\circ{}^{\cup}\vee v,\ {}_{\angle}{}^{\cup}\wedge v{}^{\cup}\wedge\circ$;

9.3.19, 20, 21, 22 $\to {}_{\angle}{}^{\cup}\vee\circ{}^{\cup}\leq{}^{\cup\cup}\circ 0{}^{\cup}\xi 0$,

$, {}_{\angle}{}^{\cup}\leq{}^{\cup\cup}\circ{}^{\cup}\xi 0{}^{\cup}\xi' 0{}^{\cup}\leq{}^{\cup\cup}\circ'{}^{\cup}\xi 0'{}^{\cup}\xi' 0$,

$, {}_{\angle}{}^{\cup}\leq{}^{\cup\cup}\circ'{}^{\cup}\xi 0'{}^{\cup}\xi' 0{}^{\cup}\leq{}^{\cup\cup}\circ{}^{\cup}\xi 0{}^{\cup}\xi' 0$,

$, {}_{\angle}{}^{\cup}\leq{}^{\cup\cup}\circ'{}^{\cup}\xi 00{}^{\cup}\wedge\circ$;

9.3.23 ${}_{x}v,\ {}_{A}u,\ {}_{\parallel}vu'vu_1,\ {}_{\parallel}vu0u_2,\ {}_{\angle}uu_1 \to {}_{\angle}u_2u$;

9.2.5, 6 ${}_{x}v,\ {}_{A}u \to {}_{A}{}^{\vee}vu,\ {}_{A}{}^{\wedge}vu$;

9.3.13, 15 ${}_{x}v,\ {}_{*k}v_1,\ {}_{A}u,\ {}_{\parallel}vuv_1u_1 \to {}_{\angle}u_1{}^{\vee}vu,\ {}_{\angle}{}^{\wedge}vuu_1$;

9.3.14 ${}_{x}v,\ {}_{\not\perp}vw,\ {}_{\angle}uw \to {}_{\angle}{}^{\vee}vuw$; 9.3.16 ${}_{x}v,\ {}_{\not\perp}vw, {}_{\angle}wu \to {}_{\angle}w{}^{\wedge}vu$;

10.1 $\to {}_{\leftrightarrows}{}^{\wedge}\circ uu$; 10.2 ${}_{x}v_1,\ {}_{\leftrightarrows}{}^{\wedge}vuw \to {}_{\leftrightarrows}{}^{\wedge\cup}vv_1u{}^{\wedge}v_1w$;

9.1.5 ${}_{2}vw,\ {}_{\pi}vw_2,\ {}_{\cup x}vv_2,\ {}_{P}vv_1,\ {}_{P}ww_1,\ {}_{A}u,\ {}_{A}u_1,$

$, {}_{\pi}vw_3,\ {}_{\not\perp}w_3{}^{\cup}u_1{}^{\cup}v_1w_1,\ {}_{\cup x}vv_3,\ {}_{\cup x}vv_4,$

$, {}_{\not\perp}v_3v_4,\ {}_{\not\perp}v_3u_1,\ {}_{\not\perp}{}^{\cup}v_3v_4{}^{\cup}v_1w_1,\ {}_{+}v_4v_3v_5,$

$, {}_{\leftrightarrows}{}^{\wedge}v_4{}^{\rightarrow\cup}v_1v_4{}^{\rightarrow\cup}w_1v_5{}^{\cup}w_3v_4u_2,\ {}_{\leftrightarrows}{}^{\wedge}v_3{}^{\rightarrow\cup}v_1v_3{}^{\rightarrow}u_2{}^{\cup}w_3v_3u_3,$

$, {}_{\angle}u_1{}^{\rightarrow}u_3{}^{\rightarrow\cup}v_1v_3{}^{\cup}w_3v_3,$

$, {}_{\pi}vw_4,\ {}_{\pi}vw_5,\ {}_{\not\perp}w_4w_5,\ {}_{\not\perp}{}^{\cup}w_4w_5{}^{\cup}u{}^{\cup}u_1{}^{\cup}v_1w_1,\ {}_{\not\perp}v_3u,$

$, {}_{\parallel}{}^{\cup}w_2v_2u{}^{\cup}w_4v_3u_4,\ {}_{\parallel}{}^{\cup}w_2v_2u{}^{\cup}w_5v_3u_5,$

$, {}_{\leftrightarrows}{}^{\wedge}v_4{}^{\rightarrow\cup}v_1v_4{}^{\rightarrow\cup}w_1v_5{}^{\wedge\rightarrow\cup}w_4v_4{}^{\cup}w_5v_4{}^{\rightarrow\cup}w_5v_4{}^{\cup}w_4v_4u_6,$

$, {}_{\angle}u_1{}^{\rightarrow\cup}v_1v_3{}^{\rightarrow}u_6{}^{\wedge\rightarrow}u_4u_5{}^{\rightarrow}u_5u_4 \to$

$\to {}_{P}v{}^{\cup\cup}u_1{}^{\cup}v_1w_1{}^{\rightarrow\cup}w_2v_2u$;

9.3.24, 25 ${}_{P}v{}^{\cup\cup}u_1{}^{\cup}v_1w_1{}^{\rightarrow\cup}w_2v_2u,\ {}_{\cup x}vv_3,\ {}_{\not\perp}v_3{}^{\cup}u{}^{\cup}u_1{}^{\cup}v_1w_1,$

$, {}_{\parallel}{}^{\cup}v_2w_2u{}^{\cup}v_3{}^{\cup\cup}u_1{}^{\cup}v_1w_1{}^{\rightarrow\cup}w_2v_2uu_2 \to$

$\to {}_{\angle}u_1{}^{\rightarrow\cup}v_1v_3{}^{\rightarrow}u_2{}^{\cup\cup\cup}u_1{}^{\cup}v_1w_1{}^{\rightarrow\cup}w_2v_2uv_3,$

$, {}_{\angle}u_1{}^{\rightarrow\cup}v_1v_3{}^{\rightarrow\cup\cup\cup}u_1{}^{\cup}v_1w_1{}^{\rightarrow\cup}w_2v_2uv_3u_2$;

9.3.26 ${}_{\pi}{}'wu,\ {}_{\cup x}{}'wv,\ {}_{x}v_1,\ {}_{x}v_2,\ {}_{\not\perp}v_2{}^{\cup}v_1v,$

$, {}_{\parallel}v_1{}^{\cup}uvv_2u_1 \to {}_{\angle}{}^{\wedge\cup}\leq{}^{\cup\cup}\circ v_1v_2{}^{\cup}\leq{}^{\cup\cup}\circ v_2v_1{}^{\rightarrow\cup}uvu_1$;

9.2.7, 8 ${}_{\pi}wv,\ {}_{A}u \to {}_{A}{}^{\wedge}vu,\ {}_{A}{}^{\vee}vu$;

9.3.27, 29 ${}_{\pi}wv,\ {}_{P}wv_1,\ {}_{A}u,\ {}_{\parallel}vuv_1u_1 \to {}_{\angle}{}^{\wedge}vuu_1,\ {}_{\angle}u_1{}^{\vee}vu$;

9.3.28 ${}_{\pi}wv,\ {}_{\not\perp}vu_1,\ {}_{\angle}u_1u \to {}_{\angle}u_1{}^{\wedge}vu$;

9.3.30 ${}_{\pi}wv,\ {}_{\not\perp}vu_1,\ {}_{\angle}uu_1 \to {}_{\angle}{}^{\vee}vuu_1$.

1.4 Technischer Überblick. Unter den 98 Regeln finden sich 10 Anfänge —Regeln mit Prämissenzahl $k = 0$, ohne lose Wortmitteilung — (: 0.1, 2.1, 5.1, 6.1, 8.3.1, 9.1.1, 9.3.19—22) und 5 Anfangsformen —Regeln mit $k = 0$, aber mit loser Wortmitteilung— (: 8.1.9, 10, 13, 11, 10.1). In der Regel 9.1.5 könnte k um 2 auf 25 vermindert werden: man ziehe die 12., 13. und 23. Prämisse auf ${}_{\not\perp}\mathrm{v}_3{}^{\cup\cup}\mathrm{v}_4\mathrm{u}_1\mathrm{u}$ zusammen. In 9.3.17, 18 genügt ${}_{\cup}x$ anstelle ${}_{\cup}{}^{*}k$.

Die Regel 8.1.0 macht zwar 8.3.1,2 schnell zugänglich, läßt sich aber streichen, weil sie eliminierbar ist, *falls* w noch ${}_{x}\mathrm{w}$ oder ${}_{\pi}.\mathrm{w}$ erfüllt oder o mitteilt, — nämlich via 8.2.2, 8.2.4, 8.1.8 (mittels 8.1.1, 17, 13). Die Regelzahl 98 errechnet sich mithin, beziehentlich für 0. bis 7., 8.1.—3., 9.1.—3. und 10. gezählt, aus $2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2 + (23 + 12 + 2) + (5 + 8 + 30) + 2$.

Die Bezifferung der Regeln legt Wert auf zusammengehörige Gruppen, z.B. 8.1.2—7 analog 8.1.18—23, 8.1.9—11 im selben Takt wie 8.2.9—11. Vor der letzten Nummer einer Regelbezifferung steht die Bezifferung des Relators der Konklusionsformel; ist nur ein Punkt da, handelt es sich um unmittelbar definierte Relatoren (: 0., 2.) oder um sukzessive definierte Relatoren (: 1., 3., 4. stützen sich auf 0.; 5., 10. auf 3.; 6. auf 5.; 7. auf 5., 6. (wobei sich 6. mit zwei Regeln $\rightarrow {}_{+}\mathrm{ooo}$ und ${}_{*k}\mathrm{v}$, ${}_{+}\mathrm{uou}_1 \rightarrow {}_{+}{}^{\cup}\mathrm{u}\,\mathrm{v}\,\mathrm{o}\,{}^{\cup}\mathrm{u}_1\mathrm{v}$ anstelle 7.1 umgehen ließe)); sind zwei Punkte da, werden mehrere Relatoren simultan definiert oder im Anschluß an solche (: 8.1. stützt sich auf 1., 3., 4., 0. und via 8.1.8 auf 8.2.; 8.2. hinwieder stützt sich via 8.2.2, 9—11 auf 8.1. und sonst auf 3., 4.. 8.3. stützt sich auf 3. und 8.1.. 9.1. stützt sich auf 0., 4. und via 9.1.5 auf 9.2., 9.3. neben 2., 4., 7., 10., 8.1.—3.; 9.2. hinwieder stützt sich via 9.2.1 auf 9.1. und im übrigen auf 6., 3., 4.; 9.3. endlich stützt sich via 9.3.24, 25 auf 9.1. neben 8.1.—3., via 9.3.2, 11, 12, 4, 6, 7, 23, 13, 15 auf 9.2. neben 3., 8.2., 5., via 9.3.27, 29 auf 9.1. und 9.2. neben 4., 8.2., und im übrigen lediglich auf 6. (oder 8.3.), 3., 8.1., 4., 8.3., 8.2.; ganz 9. ist ohne lose Wortmitteilung).

Bis auf 3., 4. greifen alle definierten Relatoren auf sich selbst zurück (: 0.2, 1.3, 2.2, 5.2, 6.2, 7.2, 8.1.0, 8, 12, 14, 15, 8.2.3—11, 8.3.2, 9.1.5, 9.2.2—8, 9.3.1, 5, 8—10, 23, 14, 16, 28, 30, 10.2). Die produzierten Formeln nehmen im induktiven Prozeß allein via 8.1.8, 14, 15 und 9.3.1, 9, 10, 23 nicht an Länge zu.

Nichtsdestoweniger ist der Teilkalkül, der nach Streichung von 9.1.—3. übrigbleibt, entscheidbar. Dies übersieht man am leichtesten, wenn die Regeln an Hand der intendierten Deutung der bisher formal gehandhabten Konstanten, Funktoren und Relatoren rekapituliert werden. Dabei motiviert sich auch die gegenüber der Bezifferung durcheinandergewürfelte Reihenfolge beim Anschreiben der Regeln; dieses nimmt Bezug auf eine gestaffelte Ingangsetzung der Regeln — gelegentlich, bei 9.3.2, 11, 12, auf Kürzung durch Konklusionen für dieselben Prämissen.

1.5 Intendierte Interpretation. Der intuitive Sinn der zur Formulierung des Kalküls erforderlichen bedeutungsvollen Zeichen (: $\rightarrow$, u.. v.. w..), für die allein bisher in **1.*** eine Erklärung gegeben wurde, gehört zum Bezirk der HILBERTschen Metamathematik, deren methodische Anforderungen unter dem Terminus "finit" — finitary, finitär — geläufig sind.[11] In finiter Sicht sind Extremalklauseln, daß *nur* die so und so zu konstruierenden Dinge unter einen genannten Begriff fallen, überflüssig; bei schrittweiser Erweiterung des Endlichen treten „umfassendere" Erfüllungen der Regeln gar nicht erst in den Kreis des Möglichen.

Die beabsichtigte Interpretation der mitgeteilten und, finit besehen, bedeutungsfreien Formeln bleibt im Bereich der konstruktiven Mathe-

[11] Vgl. beispielsweise [9], S. 171—173; dazu [7], S. 280—282.

matik; diese leugnet jedwede Vorstellung vom aktual Unendlichen, ohne deren primäre Wahrheit die klassische Mathematik (und die TARSKIsche Metamathematik) nicht voll arbeiten könnte, und faßt das Unendliche ausschließlich potentiell auf. Die operativ-dialogische Einstellung [13, 14] zur Konstruktivität wirkt einer neutralen Anerkennung oder Verwerfung formaler Postulate, bei der man die Inhalte dahinter mehr oder weniger gleichgültig taxiert, dadurch entgegen, daß das bloße „Inkonsistenz"risiko, das bei nicht-globaler Anwendungspraxis schwach bleibt, von einem starken „Verlust"risiko beim Verteidigen von Behauptungen abgelöst wird. Die hier vorgeschlagene konstruktive Arithmetik verzichtet gegenüber [15], wo der wesentliche Bestand der Analysis konstruktiv begründet wird, naturgemäß auf indefinite Variablen und Quantoren; sie grenzt ihre Aussagen vielmehr durch Aufzählung ab. Jedoch gestatten die benutzten Prädikatmarken auch andere Substitutionen als die systemgebundenen, und davon macht sogar die Deutung des Systems Gebrauch: beim Definieren eines Prädikats gewinnt sie die Einsicht in die (dialogische) Definitheit der Definition an Hand der formalen Deduktion gewisser Aussageschemata durch eine informale Anwendung. Entgegen [13—15] bleibt das tertium-non-datur hier ganz aus dem Spiel, weil es durch formale Übersetzungsverfahren lediglich partiell zu eliminieren ist und auch nach sonstigen konstruktiven Methoden nicht ohne weiteres formal gerechtfertigt werden kann.

Um gleichwohl die bezweckten Vollständigkeitseigenschaften zu ermöglichen, kommt es auf äußerste deduktive Ausgewogenheit der produzierbaren Beweis- und Definitionsmittel an. Die Quintessenz, die der rein äußerlich ins Auge springende technische Angelpunkt 9.1.5 des Kalküls $\mathfrak{S}_1$ im Verein mit 9.3.24, 25 als erste Antwort auf die formale Vollständigkeitsfrage bietet, läuft auf eine durchgreifende, konstruktiv noch akzeptable Verallgemeinerung des DEDEKINDschen Satzes über die Definition durch Induktion (1888) [3] hinaus: nämlich von absoluten unbedingten Definitionen durch gewöhnliche Induktion auf relative bedingte Definitionen durch entsprechende (schon konstruktiv deduzierte) Vorgängerinduktion; und von zu definierenden Funktionen, deren Definiensschema primitiv rekursiv ist, auf zu definierende Prädikate, deren Definiensschema hinsichtlich des aufgewiesenen Vorgängerprädikats konstruktiv deduzierbar (relativ bedingt) rekursiv „definierend", d.h. bis auf Bisubjunktion $\leftrightarrow$ bestimmend ist — ohne jedoch vom konstruktiven Sinn solcher Bestimmung erwarten zu dürfen, über jede Primaussage, die aus einem deduzierbar rekursiv „definierten" Prädikat (ohne freie Parameter) hervorgeht, sei irgendwo, -wann und -wie eine Entscheidung gefällt, auf die hin uns das formale tertium-non-datur orakelhaft erlaubt wäre.

Die intendierte Deutung der Konstanten, Funktoren und Relatoren sei jetzt kurz zusammengestellt.

Konstante: $\circ$ (*κενόν*, das Leere), 0 (Null),
ξ (Variablenkern), Π (Prädikatmarkenkern),
$\leq$ (Ordnungsprädikat), $\vee$ (verum), $\wedge$ (falsum).
Funktoren: $'$ (Nachfolger); $^{\cup}$ (Juxtapositor, kurz Juxtor),
$\rightarrow$ (Subjunktor), $^{\wedge}$ (Konjunktor), $^{\vee}$ (Adjunktor),
$\bigvee$ (Partikularisator), $\bigwedge$ (Generalisator),
$\rightarrow$ (Rekursifikator, kurz Rekursor).

Unter Zugrundelegung dieser Bedeutungen der 7 Konstanten und 1 + 7 Funktoren bezeichne w die Bedeutung des Wortes w, welche sich dem Aufbau von w parallel zusammensetzt.

Relatoren: ${}_{k}\mathrm{w}$ (w ist Grundzahl), ${}_{x}\mathrm{w}$ (w ist Variable für Grundzahlen),
${}_{*k}\mathrm{w}$ (w ist Term für Grundzahlen),
${}_{A}\mathrm{w}$ (w ist Aussageschema über Grundzahlen);
${}_{\neq}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_1 ungleich w_2), ${}_{2}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_2 verdoppelt w_1),
${}_{\pi}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_2 ist Marke für w_1-stellige Prädikate),
${}_{\cup *k}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_2 ist w_1-Tupel aus Termen),
${}_{\not{f}}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_1 ist in w_2 unfrei, w_1 enthält keine in w_2 frei vorkommende 'Variable' oder 'Marke'),
${}_{\cup x}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_2 ist w_1-Tupel aus verschiedenen Variablen),
${}_{P}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_2 ist Prädikatschema über Grundzahlen mit w_1 Stellen),
${}_{\angle}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_1 impliziert w_2),
${}_{\leftrightarrows}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_1 ist eine Abkürzung für w_2, jedoch kann w_1 das längere oder das gegebene Wort sein);
${}_{+}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2\mathrm{w}_3$ (w_3 verschmilzt w_1 mit w_2);
${}_{\|}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2\mathrm{w}_3\mathrm{w}_4$ (w_1 ist in w_2 frei zu konfusionsloser Substitution von w_3 (für w_1), *und* eine Substitution für w_1 in w_2 durch w_3 [von w_3 für w_1 in w_2] ergibt w_4;
das Ergebnis ist eindeutig, und zwar entsteht, falls w_1 und w_3 mit einem $^{\cup}$-Exemplar anfangen, das nicht zu einer 'Variable' oder 'Marke' gehört, dasjenige Ergebnis, welches — wenn w_1 für ${}^{\cup}\mathrm{w}_{11}\mathrm{w}_{12}$ und w_3 für ${}^{\cup}\mathrm{w}_{31}\mathrm{w}_{32}$ steht — die nacheinander ausgeführten Substitutionen von w_{31} für w_{11} und dann von w_{32} für w_{12} liefern).

Daß bei Deutung von ${}_{\not{f}}$, ${}_{\leftrightarrows}$, ${}_{\|}$ keine Kursivbuchstaben auftreten, weist auf den syntaktischen Gebrauch derartiger Begriffe hin, für den die Wörter einer Formel autonym zu verstehen sind: z. B. können weder Marken noch auch Variablen einfach als Namen für Substitute dienen, erst die Ergebnisse des formalen Substitutionsvorgangs werden manchmal gedeutet (: 9.3.23, 5. Prämisse, Konklusion; 9.3.13, 15, Konklusionen;

9.1.5, 27. Prämisse; 9.3.24, 25, Konklusionen; 9.3.26, Konklusion; 9.3.27, 29, Konklusionen).

1.51 Daraufhin kann ein mit Formalismen vertrauter Mathematiker bis auf 9.1.5 und 9.3.24, 25 alles lesen, und für diesen Rest genügt es vorerst, einen näheren, wenn auch noch nicht den dialogischen Sinn mit dem dort mehrmals auftauchenden Wort $^{\cup\cup}u_1{}^{\cup}v_1 w_1 \rightarrow {}^{\cup}w_2 v_2 u$ zu verbinden: es bezeichnet das (v-stellige) Prädikatschema, das *rekursiv definiert* wird unter der Voraussetzung u_1 bei der Bedingung v_1 hinsichtlich der Fundierung w_1 *durch* das Aussageschema u für die Prädikatmarke w_2 nach dem Variablen-v-tupel v_2, und zwar konstruktiv deduzierbar rekursiv definiert gemäß der 18. und der 27. Prämisse in 9.1.5. (Bei absoluten, unbedingten, expliziten Definitionen tritt beziehentlich $^{\cup}\vee o$ anstelle u_1, $\vee$ anstelle v_1, $\wedge$ anstelle w_1.)

1.52 Partikularisierte Marken gemäß 9.2.8, 9.3.29, 30 werden in **2.** entbehrlich sein; Existenzbehauptungen über Prädikate verlangen also dort einen direkten unnegierbaren Aufweis. Ohne die zitierten Regeln müßte man existentiale Formulierungen in **3.** gelegentlich unnötig abschwächen (durch negative Übersetzung).

Generalisierte Marken gemäß 9.2.7, 9.3.27, 28 wären in **2.** entbehrlich, solange es um eine deduktive Erreichung konstanter Ordinalzahlen sowie der Anordnungseigenschaften ihrer Repräsentanten geht.

Zur Substitution von passend stelligen Prädikatschemata für Prädikatmarken ist man ohne 9.3.27 auf das Kopieren von Deduktionen angewiesen; dabei mag die Konfusionslosigkeit der Substitute wieder zum Substitutionsvorgang geschlagen werden — deswegen ist die Originaldeduktion eventuell über kongruente, durch geeignete Umbenennung gebundener Variablen und Marken entstehende Aussageschemata zu leiten, nicht nur um die Substitution konfusionslos durchzuhalten, sondern auch um die Schlüssigkeit nicht durch Variablen und Marken zu stören, die im Substitut anonym frei vorkommen.

Zur Darstellung variabler Ordinalzahlen werden in **2.** generalisierte Marken innerhalb der hypothetischen Voraussetzung von Rekursoren genügen. Das Ziel, eine schwache Form transfiniter Induktion über alle (über Grundzahlen) darstellbaren Ordinalzahlen zu deduzieren, führt auch in Implikataussagen zu generalisierten Marken.

1.53 Ohne quantifizierte Marken, ohne relative und ohne bedingte Definitionen, sogar allein mit Definitionen durch gewöhnliche (Vorgänger-)Induktion neben expliziten Definitionen lassen sich bereits hohe Ordinalzahlen erreichen: in diesem Teil von $\mathfrak{S}_1$ können zum Beispiel die beiden transfiniten Induktionen, die SCHÜTTE in bezug auf zwei simultan rekursiv definierte binäre Prädikate konstruktiv-inhaltlich nachweist [17] (vgl. S. 115—118, 108), formal nachvollzogen werden; dabei hat man anzuwenden, daß Prädikatmarken sich durch etliche Deduktionskopien

variieren lassen (wie in **1.52** erwähnt), und daß Variablentupel variabler Gliederzahl mittels GÖDELS β-Funktion fortzuschaffen sind.

Bei solcher Beschränkung auf Rekursionen hinsichtlich der natürlichen Fundierung (Wohlordnung) der Grundzahlen muß man allerdings auf die Definition eines Niveauvergleichs (: [21], p. 268) zwischen den Repräsentanten deduktiv erreichter konstanter Ordinalzahlen verzichten.

1.54 Bedingte Definitionen sind für die Ordinalzahltheorie in **2.** unvermeidlich, sobald Einengungen eines fundierenden Prädikats R als Ordinalzahlrepräsentanten PR (gemäß **0.21**) fungieren und untereinander sowie mit uneingeengten Repräsentanten $\vee$ R verglichen werden sollen. $\vee\wedge$ repräsentiert übrigens die Ordinalzahl 1, und erst $\wedge$R repräsentieren die Ordinalzahl 0.

Relative Definitionen stellen sich bei der Ordinalzahltheorie in **2.** ein, sobald unbeschränkte Ordinalzahlterme (gemäß **0.23**) untereinander verglichen werden sollen.

1.6 Rekapitulation. Inoffizielle Notation. Die Anwendung von 0. macht die Formeln ${}_k{}'\cdot\cdot{}'0$ herstellbar. Die formalen Grundzahlen ${}'\cdot\cdot{}'0$ seien inoffiziell durch k, l, .. mitgeteilt. Der Inhalt, der k vor k auszeichnet, betrifft lediglich die Abstraktion von der Art der sukzessive aufeinanderfolgenden gleichförmigen Objekte (sowie von deren graphischer Ausführung), keinen ordinalen oder kardinalen Sinngehalt.

1. und **2.** leiten ${}_{\neq}\mathrm{kl}$ bzw. ${}_{2}\mathrm{kl}$ ab, für die $k \neq l$ bzw. $k + k = l$. Die formalen Variablen ${}^{\cup}\xi\mathrm{l}$ und Marken ${}^{\cup\cup}\mathrm{k}\Pi\mathrm{l}$, die an Hand **3.** bzw. **4.** als (erste) Wörter hinter ${}_{x}$ bzw. als zweite Wörter hinter ${}_{\pi}$ entstehen, seien inoffiziell mit ξ_l bzw. ${}^{k}\Pi_l$ notiert und durch x, y, .. bzw. π, ρ, .. mitgeteilt.

Die formalen Grundzahlterme k und ${}'\cdot\cdot{}'^{\cup}\xi\mathrm{l}$ (: konstante bzw. variable) gemäß **5.** seien durch t, s, .. mitgeteilt. (Die Bildung der t entspricht der Herstellung von Worttermen, nur daß jetzt die Variablenliste nicht beschränkt ist.) Die formalen Term-k-tupel ${}^{\cup\cdot\cdot\cup}\mathrm{o}\,\mathrm{t}_1 \,..\, \mathrm{t}_k$, die sich gemäß **6.** als zweite Wörter hinter ${}_{\cup}{}^{*}{}_{k}$ ergeben, mögen kurz durch $\overset{k}{\mathrm{t}}$ mitgeteilt werden. **7.** liefert genau die Formeln

$$+^{\cup\cdot\cdot\cup}\mathrm{o}\,\mathrm{t}_1 \,..\, \mathrm{t}_k\, {}^{\cup\cdot\cdot\cup}\mathrm{o}\,\mathrm{s}_1 \,..\, \mathrm{s}_l\, {}^{\cup\cdot\cdot\cup\cup\cdot\cdot\cup}\mathrm{o}\,\mathrm{t}_1 \,..\, \mathrm{t}_k\, \mathrm{s}_1 \,..\, \mathrm{s}_l,$$

deren dritte Wörter sich inoffiziell durch $\overset{k}{\mathrm{t}}\,\mathrm{s}$ mitteilen lassen: fügt man $\overset{k}{\mathrm{t}}$ und $\overset{l}{\mathrm{s}}$ zu ${}^{\cup}\overset{k}{\mathrm{t}}\,\overset{l}{\mathrm{s}}$ nebeneinander, so entsteht weder ein gemäß **6.** gebildetes Tupel aus $k + l$ Termen noch ein Wort, das in Formeln, die später gemäß **9.1.—3.** herstellbar werden, als Teilwort auftreten könnte.

1.61 Um das Geflecht der übrigen 82 Regeln ad **8.—10.** zu entwirren, denke man sich vorerst die 30 Implikationsregeln **9.3.** gestrichen und in **9.1.5** bloß die 7 ersten Prämissen, welche die erste Zeile anfüllen, beibehalten. Die so beschnittenen Regeln seien mit $\tilde{9}.1.1-5$, $\tilde{9}.2.1-8$ beziffert, die abgewandelten Relatoren ebenfalls mit einer Tilde versehen: $\tilde{p}\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2$ (w_2 ist Prädikatskelett über Grundzahlen mit w_1 Stellen), $\tilde{A}\mathrm{w}$ (w ist Aussageskelett über Grundzahlen).

$\tilde{9}.1.1-4$ liefern als zweite Wörter hinter $\tilde{p}$ folgende Prädikatskelette: das 2-stellige $\leq$ und die k-stelligen $\vee$, $\wedge$, ${}^{\cup\cup}\mathrm{k}\Pi\mathrm{l}$. Teilen $\tilde{\mathrm{P}}, \tilde{\mathrm{Q}}, \tilde{\mathrm{R}}$, .. Prädikatskelette mit, deren figürliche Gestaltung sich später kraft $\tilde{9}.1.5$ wesentlich anreichern wird,

so sind ${}^{\cup}\tilde{\mathrm{P}}\overset{k}{\mathrm{t}}$ die gemäß $\tilde{9}$.2.1 hergestellten Aussageskelette, falls k die — oder (wie im Fall $\vee$, $\wedge$) eine — Stellenzahl von $\tilde{\mathrm{P}}$ ist. Teilen $\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{B}}$, $\tilde{\mathrm{C}}$, .. Aussageskelette mit, so sind gemäß $\tilde{9}$.2.2—8 auch ${}^{\rightarrow}\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}}$, ${}^{\wedge}\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}}$, ${}^{\vee}\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}}$ und $\vee\mathrm{x}\tilde{\mathrm{A}}$, $\wedge\mathrm{x}\tilde{\mathrm{A}}$, $\wedge\pi\tilde{\mathrm{A}}$, $\vee\pi\tilde{\mathrm{A}}$ solche. Inoffizielle Notation für die Konklusionen von $\tilde{9}$.2.1—8: $(\tilde{\mathrm{P}}\overset{k}{\mathrm{t}})$, $(\tilde{\mathrm{A}} \rightarrow \tilde{\mathrm{B}})$, $(\tilde{\mathrm{A}} \wedge \tilde{\mathrm{B}})$, $(\tilde{\mathrm{A}} \vee \tilde{\mathrm{B}})$, $\vee\mathrm{x}\tilde{\mathrm{A}}$, $\wedge\mathrm{x}\tilde{\mathrm{A}}$, $\wedge\pi\tilde{\mathrm{A}}$, $\vee\pi\tilde{\mathrm{A}}$. Oder, mit Punkten statt Klammern: $\tilde{\mathrm{P}}\overset{k}{\mathrm{t}}$, $\tilde{\mathrm{A}} \overset{(l)}{\rightarrow} \tilde{\mathrm{B}}$, $\tilde{\mathrm{A}} \overset{(l)}{\wedge} \tilde{\mathrm{B}}$, $\tilde{\mathrm{A}} \overset{(l)}{\vee} \tilde{\mathrm{B}}$, $\vee_{\mathrm{x}} \tilde{\mathrm{A}}\bullet$, $\wedge_{\mathrm{x}} \tilde{\mathrm{A}}\bullet$, $\wedge_{\pi} \tilde{\mathrm{A}}\bullet$, $\vee_{\pi} \tilde{\mathrm{A}}\bullet$; $l+1$-fach punktierte Junktoren ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$) mögen schärfer trennen als l-fach punktierte und, zwecks Punkteinsparung, l-fach punktierte Subjunktoren schärfer als l-fach punktierte Konjunktoren und Adjunktoren; die Junktorenpunktation im Wirkungsstück eines Operators ($\vee_*$, $\wedge_*$, später $\rightarrow_*$) soll die Junktorenpunktation außerhalb solcher Formelteile nicht beeinflussen; am Formelende lassen sich die Endpunkte der Wirkungsstücke von Operatoren tilgen. $\tilde{\mathrm{P}}\overset{k}{\mathrm{t}}$, $\tilde{\mathrm{A}} \overset{(l)}{\rightarrow} \tilde{\mathrm{B}}$, $\tilde{\mathrm{A}} \overset{(l)}{\wedge} \tilde{\mathrm{B}}$, $\tilde{\mathrm{A}} \overset{(l)}{\vee} \tilde{\mathrm{B}}$ werden auch mit $\vee\mathrm{x}(\tilde{\mathrm{A}})$, $\wedge\mathrm{x}(\tilde{\mathrm{A}})$, $\wedge\pi(\tilde{\mathrm{A}})$, $\vee\pi(\tilde{\mathrm{A}})$ kombiniert — man unterscheide dazu $\vee_{\mathrm{x}}$ von $\vee\mathrm{x}$, usw. Von selbst versteht sich $\mathrm{t}_1 \leq \mathrm{t}_2$ anstelle $\leq \overset{2}{\mathrm{t}}$.

Inoffiziell tritt $\Rightarrow$ anstelle des imperativen $\rightarrow$, entsprechend Doppelkommata anstelle partitiver Kommata.

Zur Handhabung von $\tilde{9}$.1.5 bedarf es vorher 8.3., und für 8.3. genügt die Kenntnis von 8.1. in dem 8.3.1,2 vorangestellten bescheidenen Umfang 8.1.0—2. Bis auf weiteres darf ${}_{\not}\mathrm{v}\mathrm{u}$ sogar als "v enthält keine in u enthaltene 'Variable'" gedeutet werden. (Beachte, daß 8.1.0 nicht über das eliminierbare Ausmaß — vgl. **1.4** — hinaus Anwendung findet.) Unter den laut 8.1.0—2 herstellbaren ${}_{\not}\mathrm{x}\mathrm{w}$ befinden sich neben solchen mit w, die Tupel $\overset{k}{\mathrm{t}}$ aus (von x verschiedenen) $\mathrm{x}_1 .. \mathrm{x}_k$ bilden, auch zweckfreie Formeln wie ${}_{\not}\mathrm{x}^{\cup}\circ^{\cup\cup}\circ^{\cup}\circ\circ\circ$ oder ${}_{\not}{}^{\cup}\xi 0^{\cup\cup}\xi'' 0\circ$. 8.3. stellt sodann genau solche Variablen-k-tupel ${}^{\cup\cdot\cdot\cup}\circ\,\mathrm{x}_1 .. \mathrm{x}_k$ als zweite Wörter hinter ${}_{\cup}x$ her, in deren k Variablen keine gleichen Unterscheidungsindizes auftreten. Die so ausgezeichneten $\overset{k}{\mathrm{t}}$ seien durch $\overset{k}{\mathrm{x}}$ mitgeteilt.

Nunmehr bildet $\tilde{9}$.1.5 aus $\overset{k}{\mathrm{x}}$, k-stelligen π, $\tilde{\mathrm{P}}$ und $k+k$-stelligem $\tilde{\mathrm{R}}$ sowie $\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{C}}$ ein neues Prädikatskelett $\tilde{\mathrm{Q}}$ mit k Stellen, nämlich ${}^{\cup\cup}\tilde{\mathrm{C}}{}^{\cup}\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\mathrm{R}}{}^{\rightarrow}{}_{\cup}\pi\overset{k}{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{A}}$. Inoffizielle Notation: mit Klammern $((\tilde{\mathrm{C}}(\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\mathrm{R}})) \rightarrow (\pi\overset{k}{\mathrm{x}})\tilde{\mathrm{A}})$ bzw. $\tilde{\mathrm{C}}\tilde{\mathrm{P}}\tilde{\mathrm{R}} \rightarrow \pi\overset{k}{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{A}}$, welch letztere Notation dank der Klammern ad $\tilde{9}$.2. den Aufbau nach $\tilde{9}$.1.—2. noch eindeutig ermitteln läßt; oder mit Punkten $\tilde{\mathrm{C}} \underset{\tilde{\mathrm{P}}}{\overset{\tilde{\mathrm{R}}}{\rightarrow}} {}_{\pi\mathrm{x}}{}_{k}\tilde{\mathrm{A}}\bullet$, auch Kombination mit $\tilde{\mathrm{C}} \underset{\tilde{\mathrm{P}}}{\overset{\tilde{\mathrm{R}}}{\rightarrow}} \pi\overset{k}{\mathrm{x}}\,(\tilde{\mathrm{A}})$, wobei der Anfang von $\tilde{\mathrm{C}}$ durch erhöhte Punktezahl über dem eventuell vorangehenden Junktor kenntlich gemacht wird, soweit der Anfang nicht schon aus der den Operatoren zugehörigen Punktverteilung ersichtlich ist. (Die den Operatoren zugehörige Punktanordnung bleibt übrigens bei Substitutionen erhalten, unter Einlagerung der Substitutpunktation.)

Aussageskelette, die sich gemäß $\tilde{9}$.2.1 ergeben, heißen *Prim*aussageskelette; $\tilde{\mathrm{A}}$, die nicht prim sind, bauen sich *logisch* an Hand $\tilde{9}$.2.2—8 aus primen auf. Prädikatskelette gemäß $\tilde{9}$.1.1—4 heißen *Prim*prädikatskelette; $\tilde{\mathrm{P}}$, die nicht prim sind, bauen sich *definitorisch* an Hand $\tilde{9}$.1.5 auf, unter Heranziehung zuvor erhaltener Aussage- und Prädikatskelette. $\tilde{\mathrm{A}}$, die prim sind, können hinwieder mit Hilfe von $\tilde{\mathrm{P}}$, die nicht prim sind, definitorisch aufgebaut sein.

1.62 Um 8.1.0—2 dahin zu erweitern, daß $\not{\vdash} x w$ außer $\not{\vdash} x \overset{k}{x}$ auch $\not{\vdash} x \overset{k}{t}$ erfaßt, genügt 8.1.3 und $\not{\vdash} v u \rightarrow \not{\vdash} v' u$, was sich, analog 8.1.0, für x statt v via 8.2.2, 8.2.3, 8.1.8 (mittels 8.1.1) eliminieren läßt. Die 8.1. auf 8.2. stützende Rückverbindung 8.1.8 kann übrigens, unter Inkaufnahme einer Schar derartig eliminierbarer Regeln, ganz entfernt werden. $\| v u v_1 u_1$ darf bis auf weiteres sogar als "eine Auswechslung jedes in u enthaltenen Exemplars des Substituenden v gegen ein Exemplar des Substituts v_1 ergibt u_1" gedeutet werden. 8.2.1—4 allein umgreifen, neben allerlei überschüssigen Produktionsmöglichkeiten, die Auswechslung von Variablen gegen Terme in Variablen, Termen und Termtupeln.

Die Niederschrift der Regeln setzt hiernach die gestaffelte Ausweitung von $\not{\vdash}$ und $\|$ fort, indem sie 8.1.2, 3 durch 8.1.4—7 auf alle von ξ verschiedenen 6 (= 7 — 1) Konstanten erweitert und 8.2.4 durch 8.2.5—7 von $\cup$ auf die 3 Junktoren überträgt. Die Wörter w, für die $\not{\vdash} x w$ (via 8.1.8) herleitbar wird, umfassen jetzt insbesondere die aus $\tilde{9}.1.1$—4 gemäß $\tilde{9}.2.1$—4 herzustellenden „kleinen" $\tilde{A}$, in denen x nicht als Teilwort enthalten ist; in diesem Kreis ist die Tilde überhaupt gegenstandslos und jedes Skelett ein Schema laut 9.1.1—4, 9.2.1—4. Zu den inzwischen herleitbaren Formeln $\| v u v_1 u_1$ zählen speziell $\| x u t u_1$ für kleine Aussageschemata u, die zu x, u, t eindeutig ein u_1 ergeben, das wieder ein kleines Aussageschema bildet.

Mit 8.1.9, 10 und 8.2.9, 10 verlassen wir die bisherige engere Auslegung von $\not{\vdash}$ und $\|$, obwohl sie sich anderwärts (bei 8.1.12—23, 8.2.8) noch eine Weile durchhalten ließe. In der vollen $\not{\vdash}$-Deutung könnte man allerdings den Passus ".. oder 'Marke'" vorläufig streichen. Nach Einführung von 8.1.9, 10 erfassen die w, für die $\not{\vdash} x w$ (via 8.1.8 über 8.2.2, 3—7 *und* 9, 10 mittels 8.1.1) herleitbar wird, neben vielerlei Ausschuß jedes *primitive*, aus 9.1.1—4 gemäß 9.2.1—6 aufgebaute Aussageschema, in dem x nicht frei vorkommt, in dem x also höchstens gebunden vorkommt, d.h. als erstes Wort hinter einem Quantor $\vee$, $\wedge$ oder als im zweiten Wort dahinter — im Wirkungsstück — enthaltene Teilwörter; in diesem Wirkungsstück können solche x-Exemplare auch bereits gebunden sein, nämlich *durch* den jeweils innersten ein solches x bindenden Quantor. Die Hinzunahme von 8.2.9, 10 bewirkt, daß insbesondere die Formeln $\| x u t u_1$ für primitive Aussageschemata u erreicht werden, wobei sich zu x, u, t eindeutig ein u_1 ergibt, das wieder ein primitives Aussageschema bildet, nämlich dasjenige, welches durch Auswechslung jedes in u freien (d.h. in u nicht gebundenen) x-Exemplars gegen ein t-Exemplar entsteht, vorausgesetzt jedoch, daß diese Substitution konfusionslos ist, daß also kein in u freies x-Exemplar im Wirkungsstück eines Quantors liegt, der eine im Substitut t (frei) enthaltene Variable bindet.

Wer die beiden Konjuganden der $\|$-Deutung getrennt definiert haben möchte, denke sich für den ersten Konjugand in 8.2.1—7, 9, 10 überall die vierten Wörter hinter $\|$ fort und streiche die 2. Prämissen in 8.2.9, 10; für den zweiten Konjugand sind bisher bloß die 1. Prämissen in 8.2.9, 10 zu streichen.

Substitutionen für v in $\vee v u$, $\wedge v u$ erledigt 8.2.2 via 8.1.9, 10; Konfusionslosigkeit in $\vee v u$, $\wedge v u$ bei $\not{\vdash} w u$ läuft über 8.2.2, sobald $\not{\vdash} w v$, $\not{\vdash} w u \rightarrow \not{\vdash} w \vee v u$, $\not{\vdash} w \wedge v u$ (analog 8.1.0) für x statt w via 8.2.2, 9 bzw. 10, 8.1.8 mittels 8.1.1 eliminiert worden ist. — Will man ohne die Rückverbindung 8.1.8 arbeiten, so sind die letztgenannten Regeln nicht zu entbehren; natürlich auch nicht die 8.1.0 analogen Regeln für die 3 Junktoren.

Die restlichen 16 Regeln ad 8.1.—2. greifen ziemlich ineinander, erneut verzahnt mit 8.2.1—7, 9, 10 und 8.1.8, wie auch 8.1.1—7, 9, 10 mit jenen.

8.1.12, 13 besorgen zunächst, daß $\not{\vdash} x u$ für primitive Aussageschemata u auf $\not{\vdash} \overset{k}{x} u$ ausgedehnt wird — für u, in denen die in $\overset{k}{x}$ enthaltenen Variablen nicht frei vor-

kommen. 8.1.13 kann ersetzt werden durch $\rightarrow {}_{\not}\circ\circ$, ${}_{\not}\circ 0$, ${}_{\not}\circ\xi$, ${}_{\not}\circ\Pi$, ${}_{\not}\circ\leq$, ${}_{\not}\circ\vee$, ${}_{\not}\circ\wedge$ (: Elimination von 8.1.13 via 8.2.2, 3—7, 9—11, 8.1.8 mittels ${}_{\not}\circ\circ$ gelingt zumindest, *falls* u ein $\overset{k}{\mathrm{t}}$ oder $\tilde{\mathrm{P}}$ oder $\tilde{\mathrm{A}}$ ist, nämlich dank 8.1.2, 18, 12); 8.1.13 wäre auch mittels $\rightarrow {}_{\not}\circ\circ$ eliminierbar, wenn man $\rightarrow {}_{\|}\mathrm{v}\,\mathrm{u}\,\mathrm{v}\,\mathrm{u}$ hinzunimmt. (8.1.12 ist nicht via 8.2.2, 8 und 8.1.8 eliminierbar, da man 8.1.8 erst mittels 8.1.12 anwenden kann.)

Beim Gebrauch von ${}_{\not}$, ${}_{\|}$ in 9.1.—3. wird zwar für o in u stets o substituiert (: siehe 9.1.5, 24. und 25. Prämisse, sowie 9.3.24, 25, 4. Prämisse), aber 8.2.2 liefert mit 8.1.13 ohnehin ${}_{\|}\circ\,\mathrm{u}\,\mathrm{v}_1\,\mathrm{u}$, also u als Ergebnis.

8.1.16, 17 und 8.1.18—23 leisten für π, was 8.1.1 und 8.1.2—7 für x leisten. Bei ${}_{\not}\pi\,\rho$ sind die beiden Stellen- oder die beiden Unterscheidungsindizes ungleich. Für die ${}_{\not}$-Deutung würde zwar teils noch ". . oder in w_2 enthaltene 'Marke'" genügen — die volle ${}_{\not}$-Deutung wird aber mit 8.1.10, 9 und 8.2.10, 9 für π anstelle v akut. Das für x Erörterte überträgt sich auf π, nachdem auch 8.2.12 in Kraft ist, wodurch 8.2.1 von x auf π übertragen wird. (Freilich verfügen wir hinsichtlich ${}_{\|}\pi\,\mathrm{u}\,\mathrm{v}_1\,\mathrm{u}_1$ bei primitiven Aussageschemata u, u_1 vorerst bloß über Primprädikatschemata aus 9.1.1—4 als Substitute v_1.)

8.2.8 führt simultane Substitutionen ein, die im allgemeinen von der Reihenfolge der Einzelsubstitutionen abhängen. Die Konfusionslosigkeit ließe sich daher nicht abtrennen, ohne auf die Zwischenergebnisse Bezug zu nehmen.

8.1.11, 8.2.11 entsprechen 8.1.9, 10, 8.2.9, 10. Das für die Quantoren $\vee$, $\wedge$ Gesagte überträgt sich auf den neuen Operator $\rightarrow$. $\rightarrow$ bindet in Skeletten $\tilde{\mathrm{P}}$, $\tilde{\mathrm{A}}$ Aussageschemata der Form ${}^{\cup}\pi\,\overset{k}{\mathrm{x}}$ (gemäß 9.1.4, 9.2.1); darum besorgen 8.1.14, 15, die Inversionen zu 8.1.12, noch eine Verteilung der Bindung. 8.2.4 (und 8.1.0 im eliminierten Umfang) bewirken schließlich, daß ${}_{\not}\mathrm{x}\,\mathrm{u}$, ${}_{\not}\overset{k}{\mathrm{x}}\,\mathrm{u}$, ${}_{\not}\pi\,\mathrm{u}$, ${}_{\not}{}^{\cup}\pi\,\overset{k}{\mathrm{x}}\,\mathrm{u}$ für jedes $\tilde{\mathrm{P}}$, $\tilde{\mathrm{A}}$ anstelle u herleitbar wird, in dem die im ersten Wort hinter ${}_{\not}$ enthaltenen Variablen oder Marken nicht frei vorkommen. Man beachte, daß in ${}^{\cup\cup}\tilde{\mathrm{C}}\,{}^{\cup}\tilde{\mathrm{P}}\,\tilde{\mathrm{R}}\,\rightarrow{}^{\cup}\pi\,\overset{k}{\mathrm{x}}\,\tilde{\mathrm{A}}$ als Wirkungsstück des Rekursors allein $\tilde{\mathrm{A}}$ fungiert, während $\tilde{\mathrm{C}}$, $\tilde{\mathrm{P}}$, $\tilde{\mathrm{R}}$ von der ${}^{\cup}\pi\,\overset{k}{\mathrm{x}}$-Bindung unberührt bleiben; gleichwohl formt $\rightarrow$ erst nach Anflicken von $\tilde{\mathrm{C}}$, $\tilde{\mathrm{P}}$, $\tilde{\mathrm{R}}$ ein Prädikatskelett. Ebenso werden ${}_{\|}\mathrm{x}\,\mathrm{u}\,\mathrm{t}\,\mathrm{u}_1$, ${}_{\|}\overset{k}{\mathrm{x}}\,\mathrm{u}\,\overset{k}{\mathrm{t}}\,\mathrm{u}_1$, ${}_{\|}\pi\,\mathrm{u}\,\tilde{\mathrm{Q}}\,\mathrm{u}_1$, ${}_{\|}{}^{\cup}\pi\,\overset{k}{\mathrm{x}}\,\mathrm{u}\,{}^{\cup}\tilde{\mathrm{Q}}\,\overset{k}{\mathrm{t}}\,\mathrm{u}_1$, ${}_{\|}{}^{\cup}\overset{k}{\mathrm{x}}\,\pi\,\mathrm{u}\,{}^{\cup}\overset{k}{\mathrm{t}}\,\tilde{\mathrm{Q}}\,\mathrm{u}_1$ für jedes $\tilde{\mathrm{A}}$ anstelle u herleitbar, wobei sich stets eindeutig ein $\tilde{\mathrm{A}}_1$ als u_1 ergibt; z. B. im dritten Fall durch Auswechslung jedes in $\tilde{\mathrm{A}}$ freien π-Exemplars gegen ein $\tilde{\mathrm{Q}}$-Exemplar, vorausgesetzt, daß dabei kein in $\tilde{\mathrm{A}}$ freies π-Exemplar im Wirkungsstück eines Operators $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ liegt, der eine im Substitut $\tilde{\mathrm{Q}}$ frei vorkommende Variable oder Marke bindet.

10.1, 2 liefern die Formeln ${}_{\leftrightarrows}\wedge{}^{\cup}\cdot\cdot{}^{\cup}\circ\,\mathrm{x}_1\,..\,\mathrm{x}_l\,\mathrm{u}\wedge\mathrm{x}_l\cdot\cdot\wedge\mathrm{x}_1\,\mathrm{u}$. Die Abkürzung, das erste Wort hinter ${}_{\leftrightarrows}$, enthält 2 Primfiguren mehr als das abzukürzende zweite Wort; der Vorteil liegt in dem $\cdot\cdot$-freien Wort $\wedge\,\overset{k}{\mathrm{x}}\,\tilde{\mathrm{A}}$ anstelle $\wedge\,\mathrm{x}_k\cdot\cdot\wedge\mathrm{x}_1\,\tilde{\mathrm{A}}$.

Wer lose Wortvariablen störend findet, kann die Anfangsformen durch Anfänge für die Konstanten und Regeln zum Aufbau mit den Funktoren ersetzen. Man kann auch die Überproduktion eindämmen, z. B. ${}_{x}\mathrm{v}$, ${}_{*k}\mathrm{v}_1\rightarrow{}_{\|}\mathrm{v}\,\mathrm{v}\,\mathrm{v}_1\,\mathrm{v}_1$ und ${}_{\pi}\mathrm{w}\,\mathrm{v}$, ${}_{P}\mathrm{w}\,\mathrm{v}_1\rightarrow{}_{\|}\mathrm{v}\,\mathrm{v}\,\mathrm{v}_1\,\mathrm{v}_1$ statt 8.2.1, 12 fordern; dabei wird freilich 8. mit 9. verflochten, so daß die Bezifferung umzuändern wäre. Die vorliegende Variante sucht dem Verlangen nach „Rasanz" der Formulierung entgegenzukommen — die letzte Verbalfassung (1961) füllte 15 Seiten.

1.63 Wir gehen jetzt von den Skeletten $\tilde{\mathrm{P}}$, $\tilde{\mathrm{A}}$ zu Prädikat- und Aussageschemata über und teilen Wörter u, für die ${}_{P}\mathrm{w}\,\mathrm{u}$ bzw. ${}_{A}\mathrm{u}$, durch P, Q, R, .. bzw. A, B, C, .. mit. Fortan sind also alle 27 Prämissen von 9.1.5 in Kraft. Schemata ohne

frei darin vorkommende Marken heißen Prädikat- bzw. Aussage*formen*. Formen ohne frei darin vorkommende Variablen heißen Prädikate bzw. Aussagen.

Die logischen Funktoren $^{\rightarrow}$, $^{\wedge}$, $^{\vee}$, $\bigvee$, $\bigwedge$ lese man nacheinander: dann (wenn . . so . .), und, oder (oder auch), es gibt (für mindestens ein, für einige), für alle.

9.3.1—10 bieten die Regeln der affirmativen Junktorenlogik, wobei es sich zunächst um kleine A handelt (ehe 9.2.5—8 und 9.1.5 mitspielen). 9.3.11, 12 fügen ex falso quodlibet und ex quodlibet verum hinzu. Für $\angle$AB wird inoffiziell A $\angle$ B notiert.

Mit kleinen A lassen sich noch 9.3.17—23 vorwegnehmen, die eine Definition der Primprädikate $\bigvee$, $\bigwedge$, $\leq$ und eine Fassung der mathematischen (vollständigen) Induktion betreffen. $\bigvee$, $\bigwedge$, mit beliebiger, aber jeweils fester Stellenzahl, ermöglichen, P und R in $^{\cup\cup}$C$^{\cup}$PR$^{\rightarrow}$** anfangs mit rekursorfreien Prädikaten zu besetzen. Die Aussagen $^{\cup}\bigvee$o, $^{\cup}\bigwedge$o dürfen inoffiziell mit $\bigvee$ bzw. $\bigwedge$ notiert werden; wo es auf Unterscheidung von Prädikaten ankommt, sei ($\bigvee$) bzw. ($\bigwedge$) notiert.

Die Variablenspezialisierung in 9.3.19—22 (: $\bigvee \angle 0 \leq \xi_0$, $\xi_0 \leq \xi_1 \angle {}'\xi_0 \leq {}'\xi_1$, ${}'\xi_0 \leq {}'\xi_1 \angle \xi_0 \leq \xi_1$, ${}'\xi_0 \leq 0 \angle \bigwedge$) ist mit 9.3.16, 15 aufzuheben. Hierbei sind freilich schon nicht kleine, vorerst primitive, sogar ohne 9.2.7, 8 aufgebaute A im Spiel, und 9.3.13—16 ergänzen die effektive Junktorenlogik 9.3.1—12 für solche A zur effektiven Quantorenlogik (über Grundzahlen).

$\leq$ statt $=$ einzuführen, ist Geschmackssache: bei der unter **2.** innerhalb $\mathfrak{S}_1$ entwickelten Ordinalzahltheorie ist $\leq$ zwischen Ordinalzahlrepräsentanten definitorisch vorrangig.

Zur dialogischen Deutung von 9.3.1—23 (sowie nachher 9.3.26) sei auf [14] §§ 2, 4, 5 verwiesen, wegen 9.3.1 ist auch [14] S. 83/84 zu bedenken.

1.631 9.1.5 bewirkt den Übergang zu nicht primen P, wonach 9.3.1—23 auch für nicht primitive A zur Entfaltung kommen, ergänzt durch 9.3.24, 25. Auf diese zentralen Regeln gehen wir in **1.632** ausführlich ein.

9.3.26 drückt das Gleichheitsprinzip für Prädik**at**marken aus. Für Prädikatformen anstelle der Marken ist das Gleichheitsprinzip eliminierbar. 9.3.26 erzwingt, daß bei informalen Deduktionskopien als Substitute für Marken nur arithmetische Prädikate in Frage kommen, die mit der Grundzahlgleichheit verträglich sind.

9.2.7, 8 und 9.3.27, 28, 29, 30 (analog 9.2.6, 5 bzw. 9.3.15, 16, 13, 14) sind auf die Prädikatschemata von $\mathfrak{S}_1$ selbst zugeschnitten: 2. Prämisse in 9.3.27, 29. Wieso man dabei formalistisch mit gebundenen Prädikatmarken statt Prädikatvariablen hantieren kann, wird in **1.64** erörtert.

Schon jetzt sei darauf hingewiesen, daß 9.3.26—30 ebenso wie 9.3.1—25 auf dem Wege über die Rückkopplung 9.1.5 die Spirale Prädikat-Aussage-Implikation--Prädikat immer weitertreiben.

1.632 Die 20 Prämissen in Zeile 2 bis 9 von 9.1.5 werden von $\angle$ verursacht, und zwar gehören die 8.—15. Prämisse in den Zeilen 2 u. 3 zu der (mit Abkürzungen laut 16. und 17. Prämisse ausgedrückten) 18. Prämisse in Zeile 5; die 19.—25. Prämisse in den Zeilen 6 u. 7 gehören, zusammen mit der 10.—15. Prämisse in den Zeilen 2 u. 3, zu der (mit Abkürzung laut 26. Prämisse ausgedrückten) 27. Prämisse in Zeile 9.

Die 18. Prämisse, inoffiziell notiert

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{C} \angle \bigwedge \overset{k}{\mathrm{y}}(\mathrm{P}\overset{k}{\mathrm{y}} \dot{\rightarrow} \bigwedge \overset{k}{\mathrm{z}}(\mathrm{P}\overset{k}{\mathrm{z}} \dot{\rightarrow} \mathrm{R}\overset{k}{\mathrm{z}}\overset{k}{\mathrm{y}} \rightarrow \rho\overset{k}{\mathrm{z}}) \rightarrow \rho\overset{k}{\mathrm{y}}) \dot{\rightarrow} \mathrm{P}\overset{k}{\mathrm{y}} \rightarrow \rho\overset{k}{\mathrm{y}},$$

ist an Hand der 13. bzw. 9. Prämisse, wonach $\overset{k}{\mathrm{y}}$ und ρ in C nicht frei vorkommen, für $\overset{k}{\mathrm{y}}$ wie für ρ generalisierbar; die 9. und 14. Prämisse sorgen noch dafür, daß

$\rho, \overset{k}{y}, \overset{k}{z}$ nicht mit anonymen Parametermarken bzw. -variablen in P, R kollidieren können.

(1) bedeutet, daß die Definitionsvoraussetzung C die P-bedingte (Vorgänger-) Induktion bezüglich R impliziert, für ϱ nach $\overset{k}{y}$.

Die 27. Prämisse, inoffiziell notiert

$$(2) \qquad C \angle P \overset{k}{y} \ddot{\rightarrow} \wedge \overset{k}{z} (P \overset{k}{z} \ddot{\rightarrow} R \overset{k}{z} \overset{k}{y} \dot{\rightarrow} \pi_1 \overset{k}{z} \leftrightarrow \pi_2 \overset{k}{z}) \dot{\rightarrow} A (\overset{k}{y}, \pi_1) \leftrightarrow A (\overset{k}{y}, \pi_2),$$

ist an Hand der 13. bzw. 22. Prämisse, wonach $\overset{k}{y}$ und π_1, π_2 in C nicht frei vorkommen, für $\overset{k}{y}$ wie für π_1, π_2 generalisierbar; die 22. und 23. Prämisse sorgen dafür, daß π_1, π_2 auch nicht mit anonymen Parametern in P, R und π_1, π_2, $\overset{k}{y}$ nicht mit solchen in $A (\overset{k}{x}, \pi)$ kollidieren können. (Der 13. und 14. Prämisse zufolge kommen $\overset{k}{y}$ in C und $\overset{k}{y}, \overset{k}{z}$ in P, R bereits nicht frei vor.)

(2) bedeutet: die Definitionshypothese C impliziert die P-bedingte „Unabhängigkeit" des Definiensschemas $A (\overset{k}{x}, \pi)$ hinsichtlich des Vorgängerprädikats R (für π nach $\overset{k}{x}$), d.h. daß A im Argument $\overset{k}{y}$ nur in solchen Argumenten $\overset{k}{z}$ von π bis auf Bisubjunktion abhängt, die $\overset{k}{y}$ bezüglich R bei der Bedingung P vorangehen.

Die $\tilde{A}_1$, die sich aus $\|xutu_1$, $\|\overset{k}{x}u\overset{k}{t}u_1$, $\|\pi uQu_1$, $\|^{\cup}\pi\overset{k}{x}u^{\cup}Q\overset{k}{t}u_1$, $\|^{\cup}\overset{k}{x}\pi u^{\cup}\overset{k}{t}Qu_1$ für jedes A anstelle u eindeutig als u_1 ergeben (weil jedes A ein $\tilde{A}$ und jedes Q ein $\tilde{Q}$ ist), sind jetzt Aussageschemata A_1, da gegebenenfalls immer 9.1.5 statt $\tilde{9}$.1.5 bemüht werden muß.

Bei der 24. und 25. Prämisse in 9.1.5 ist die Substitutionsreihenfolge irrelevant, da Substituend $\overset{k}{x}$ und Substitut $\overset{k}{y}$ je aus verschiedenen Variablen bestehen — $\not{\rightarrow} v_2 v_3$ ist aber wohlgemerkt nicht verlangt — und da in den Substituten π_1, π_2 für π keine Variablen anonym frei vorkommen. Bei der 4. Prämisse in 9.3.24, 25 hingegen kommt es darauf an, zuerst v_3 für v_2 in u zu substituieren und hernach $^{\cup\cup}u_1{}^{\cup}v_1 w_1 \rightarrow {}^{\cup}w_2 v_2 u$ für w_2, während, andersherum, Variablen aus v_2, die eventuell in u_1, v_1, w_1 frei vorkommen, durch solche aus v_3 ersetzt würden.

9.3.24, 25 bewirken Umformungen, die, inoffiziell notiert,

$$(3) \qquad C \angle P \overset{k}{y} \dot{\rightarrow} A (\overset{k}{y}, CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A) \leftrightarrow (CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A \overset{k}{y})$$

postulieren; dabei sorgt die 3. Prämisse dafür, daß die Variablen aus $\overset{k}{y}$ in A, C, P, R nicht frei vorkommen, also insbesondere (hinter C) generalisierbar sind und auch nicht mit anonymen Parametern in P, R, A kollidieren — unbeschadet nachträglicher substitutioneller (oder definitorischer) Gleichsetzungen. Eine Umbenennung von $\overset{k}{y}$ in $\overset{k}{x}$ via 9.3.15 hängt davon ab, ob die Variablen aus $\overset{k}{x}$ nicht in C, P, R frei vorkommen, wo sie der Rekursor-Bindung von $\pi \overset{k}{x}$ entgehen. Sollte π in C, P, R frei vorkommen, so kann die Substitution von $CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$ für π in $A (\overset{k}{y}, \pi)$ zu keinerlei Kollisionen führen, weil jedes in $A (\overset{k}{y}, \pi)$ freie π-Exemplar durch $CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$ ersetzt wird.

(3) bedeutet: die Voraussetzung C impliziert, daß in einem Argument $\overset{k}{y}$, das der Bedingung P unterliegt, der Definiend $CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$ durch $A(\overset{k}{y}, CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)$

definiert ist. Nach der Bedeutung von (2) wäre dieses Definiens $A(\overset{k}{y}, CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)$ selbst unter C definiert (bis auf Bisubjunktion), *falls* unter C der Definiend schon für alle $\overset{k}{z}$, die $P\overset{k}{z}$ und $R\overset{k}{z}\overset{k}{y}$ unterliegen, mit Hilfe des Definiensschemas $A(\overset{k}{x}, \pi)$ definiert ist. Daraus folgt nach der Bedeutung von (1), daß unter C der Definiend $CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$ im Argument $\overset{k}{y}$ tatsächlich definiert ist.

Hinter der (relativen bedingten) Vorgängerinduktion bezüglich R für "$CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$ ist in $\overset{k}{y}$ definiert" nach $\overset{k}{y}$ verbirgt sich kein imprädikatives Vorgehen. Zunächst hat man sich für eine voraussichtlich passende Definitionsfundierung R zu entscheiden, um mit R die Ableitung von (1) und (2) zu versuchen. Ist dies geglückt, dann antizipiert die „unbestimmte" Marke ρ in der Ableitung von (1) nicht allein (in $\mathfrak{S}_1$ später als A, C, P, R zugängliche) „bestimmte" Prädikate oder Prädikatformen, die in Ableitungskopien zu (1) als Substitute für ρ fungieren, sondern — auf der Ebene konkreter, (konstruktiv-)inhaltlicher Beweiskopien aus der Ableitung von (1) — auch Induktionsaussageformen $\mathfrak{A}(\overset{k}{y})$ anstelle des abstrakt-formalen Induktionsaussageschemas $\rho \overset{k}{y}$, die den jeweils formal aufgezählten Aussagebezirk übersteigen. Für die Deutung von (3) innerhalb $\mathfrak{S}_1$ wird jedoch kein uferloser Bereich solcher $\mathfrak{A}$ beansprucht, sondern ein wohlabgestreckter Bezirk, der sich wiederum aufzählen läßt.

In (3) gehen einem konstanten Argument transfiniter „Höhe" — z. B. 1 bezüglich $0 R 2 R 4 \ldots R 1 R 3 \ldots$ — nicht etwa Ausdrücke variabler und im allgemeinen transfiniter Länge voran, jedenfalls keine solchen, die nicht auf Aussageformen fester endlicher Länge hinauslaufen und somit der effektiven Quantorenlogik über Grundzahlen anheimfallen. Schlußformen wie die unendliche Induktion oder Definitionen wie die für $\in O$ und $<_O$, welche operativ betrachtet uneigentlich sind (: [13] S. 172), da in deren Prämisse eine generelle Implikation eingeht, führen zu Erzeugnissen, über die zwar im besonderen Einzelfall Einigkeit herrschen mag, über die aber hier und jetzt keine wohlbegrenzte allgemeine Reflexion einwandfrei denkbar ist. Weder intuitionistisch noch dialogisch-konstruktiv kann man heute allen künftig gültig werdenden Prämissen, die etwas "für jedes n" ansetzen, zuschauen; jene Ordinalzahlen, die zur schrittweisen Exhaustion des Definiens von O nötig wären, um eine inklusions-isotone transfinite Folge von Grundzahlmengen O_α zu indizieren — vereinigt O_α, was der Definiens-Term für O in Anwendung auf vorgängige O_ξ, $<_{O_\xi}$ erzeugt, so bricht die Folge O_α nach der naiven oder axiomatischen Mengenlehre für ein λ aus der zweiten Zahlklasse ab, indem außer $O_\lambda \subseteq O_{\lambda+1}$ auch $O_{\lambda+1} \subseteq O_\lambda$ zutrifft —, diese Ordinalzahlen wollen vielmehr unabhängig konstruiert sein, also mit einer eigentlichen Definition. (Die erste nicht-konstruktive Ordinalzahl ist folglich höchstens dann wohlbestimmt, wenn sie relativ zu einem formalen System verstanden wird.)

1.633 Ein P-bedingt definiertes Prädikat hat im Fall $\mathrm{P}\overset{k}{\mathrm{y}} \angle \wedge$ überhaupt keine bestimmte Definition und fällt für solche $\overset{k}{y}$ nicht, wie eingeengte Prädikate, durchweg falsch aus.

Prädikatschemata Q, in denen Marken frei vorkommen, sind dank (1), (2) mit Gewißheit konstruktiv sinnvoll; denn die Substitution von Prädikatformen für alle in Q freien Marken liefert wieder Prädikatformen Q_1, und eine Substitution konstruktiv-inhaltlich sinnvoller Prädikatformen in Q hat wieder ebenso sinnvolle Bedeutung. Prädikatskelette $\tilde{\mathrm{Q}}$ hingegen sind meist ohne Sinn, zumindest konstruktiv beurteilt.

1.634 Die dialogische Deutung von (3) überträgt sich aus der in **0.133** mit der einfachen Klausel, daß der Angreifer zuvor C und dann auch noch $\mathrm{P}\overset{k}{\mathrm{y}}$ übernommen hat. Es sei hier darauf verzichtet, diese Gewinnstrategien selber von ihrem Endstück aus wieder mit Hilfe eines Kalküls herzustellen; mit einer solchen „adäquaten" Umformulierung von $\mathfrak{S}_1$ gedenke ich mich anderwärts zu befassen.

1.64 Bei engem Kontakt mit der Deutung würden anstelle $\wedge$-, $\vee$- bzw. $\rightarrow$-gebundener Marken ${}^k\Pi_l$ zwei Sorten von Prädikatvariablen angebracht sein — sagen wir „logische" ${}^k\Xi_l$ und „definitorische" ${}^k\mathrm{H}_l$, mitgeteilt durch X bzw. Y. Formalistisch dürfen wir aus folgenden Gründen die drei (unbeschränkten) Listen für π, X, Y zusammenschieben: aus dem Aufbau eines P oder A geht eindeutig hervor, welche π-Exemplare in P [in A] frei und damit „echte" Marken sind und welche π-Exemplare in P [in A] *durch* welchen Generalisator, welchen Partikularisator bzw. welchen Rekursor gebunden sind; überdies zeigen 9.1.5 und 9.3.24, 25, daß die Einführung von $***\rightarrow \mathrm{Y}**$ und der Umgang damit ohne Verknüpfung mit $\wedge\,\mathrm{X}*$, $\vee\,\mathrm{X}*$ formulierbar ist.

1.65 Dieser gesamten Deutung von $\mathfrak{S}_1$ in einer konstruktiven Theorie der Grundzahlen ist zu entnehmen, daß $\angle^{\cup}\vee\mathrm{o}^{\cup}\wedge\mathrm{o}$ unableitbar ist. $\mathfrak{S}_1$ ist ja so eingerichtet, daß jede abgeleitete Implikation — nach Substitution von Grundzahlen für freie Variablen und von systeminternen oder externen Prädikaten für freie Marken — dialogisch zu gewinnen ist, wenn die Partner metadialogische Überlegungen an Hand $\mathfrak{S}_1$ akzeptieren, seien letztere nun trivial (wie bei 9.3.1) oder nicht (wie bei 9.3.24, 25 im Verein mit 9.1.5).

Vom operativen Standpunkt aus ist $\mathfrak{S}_1$ in dem Sinne widerspruchsfrei, daß jede mittels $\mathfrak{S}_1$ abgeleitete Gleichheit zwischen konstanten Grundzahlen bereits direkt mit $\Rightarrow 0 = 0$ und $k = l \Rightarrow {}'k = {}'l$ herzustellen ist; sämtliche Definitions- und Beweismanipulationen von $\mathfrak{S}_1$ sind relativ eliminierbar — diese Einsicht ließe sich gegenüber [13] durch formalistische Fixierung jedes benutzten Metakalküls präzisieren.

1.7 Rückblick. Den Ansatz (1) „ (2) $\Rightarrow$ (3) meiner Version von $\mathfrak{S}_1$ gab ich, für den absoluten unbedingten Fall, 1960 in Stanford bekannt [22, 23], vorgeformt in [21], Etappe I und II; die erhaltenen Definiensschemata nannte ich 1960 „logisch" rekursiv. LORENZEN [13] will eine Fundierung aus einem (in endlich viele Bisubjunktionen separierten) Definitionsschema „ablesen" und spezialisiert die Fundierung R infolgedessen auf Prädikate, die explizit durch ein (partikularisiertes) Adjugat von Gleichungskonjugaten definierbar sind; daß für abgelesene R, falls die diesbezügliche Vorgängerinduktion logisch ableitbar ist, (2) gilt, wird dort weder formuliert noch bewiesen.

Um jede Unsicherheit, die in teils verbalen und teils formalen Äußerungen verborgen sein könnte (: s. Fußnote 5 zu **0.131**), bei meinem Ansatz für $\mathfrak{S}_1$ auszuschließen, erschien es mir ratsam, den Einbau von (1) „ (2) $\Rightarrow$ (3) in ein formales System nicht der Vorstellung des Lesers zu überlassen; ich war vielmehr bemüht, ein (höchst wahrscheinlich) lückenloses System kalkulatorischer Vorschriften aus einem Guß an die Spitze zu stellen.

1.8 Vorschau. Ich glaube, daß die formale Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{S}_1$ sich noch auf einen (relativ vollständigen) Kalkül finit-direkter Kalkulation $\mathfrak{K}_1$ umrechnen läßt, dessen Formeln allein bei Anwendung einer Regel der „direkten" Induktion (mit logikfreiem Induktionsschritt) formal abgebaut werden. Um selbst ohne Gleichheit mit ihren Rückschlüssen wie ${}'0 = {}'0 \angle 0 = 0$ zu arbeiten, studiere man an (dyadischen) Gödelnummern für geregelte Ableitungen mit laufender Gebrauchsanweisung die Kalkulationskerne von Verfahren zur Elimination von Zusatzregeln, deren Reflexionstyp im allgemeinen dadurch kenntlich gemacht sei,

daß man eine Nummer für eine Ableitung nach festgesetzten Regeln mit einer Zusatzchiffrierung versiegelt.

1.9 Schlußbemerkung zur Definition. Einem Gespräch mit A. HEYTING (1957) entnehme ich, daß intuitionistisch gewisse Bedenken gegen „transfinit" viele Quantoren bestehen, wie sie durch gewisse rekursiv definierte Prädikate — etwa durch den Niveauvergleich zwischen Fundierungen (: [21], Etappe I; siehe hier **2.3**) — eingeschmuggelt zu werden scheinen. Ich hoffe allerdings, daß, nachdem **2.** ab **2.3** klarstellt, welcher in **1.3** finit „legalisierte" Umgang mit transfiniter Rekursion mir damals als Werkzeug diente, der Intuitionismus weitherzig genug ist, solch eine sinngerechte Übertragung vom Zeichen = bei Funktionen auf ↔ bei Prädikaten zu gestatten, und bereit, die darin schlummernden Möglichkeiten auszubeuten — zumal die unterschiedlich weite Kluft zwischen "es gibt" und "für alle" im definiten Bezirk der Grundzahlen einerseits und im indefiniten Bereich der Prädikate über Grundzahlen andererseits hier nicht mit ein und derselben formalen Asymmetrie behandelt wird, sondern bei Prädikaten durch Rekursifikation bzw. durch freie Marken möglichst subtil in (Wörter-)Rechnung gestellt ist.

2. Partielle Stabilisierung. Konstruktive Ordinalzahltheorie

Dem Titel der Arbeit folgend wenden wir uns jetzt parenthetisch den Produktionen des definierten Regelsystems $\mathfrak{S}_1$ zu. Der Kürze halber wird vorausgesetzt, die Deduktionstechnik in $\mathfrak{S}_1$ sei durch metamathematische Theoreme, die einer Rekapitulation von Verfahren und Methoden aus HILBERT-BERNAYS (1934/39) [10] sowie KLEENE (1952) [11] entstammen, so weit gediehen, daß die Geschmeidigkeit verbaler Beweise durch Verweis auf die Mitteilung vorfabrizierter Deduktionsbausteine und auf eliminierbare Regeln auch formal erreichbar ist, jedoch mit den Vorzügen, die die Prägnanz einer formalen Ausdrucksweise vor der sprachlichen, nur teilweise formalen Darbietung logischer und definitorischer Gedankenabläufe auszeichnet — namentlich wenn diese beanspruchen, konstruktiv zu sein.

2.1 Zur Übertragung von $\vdash$ in $\mathfrak{S}_1$ ist $\vdash$ A als $\mathfrak{S}_1$-Ableitbarkeit von $\vee \angle$ A zu verstehen.[12] Bei relativer Ableitbarkeit $A_1, .. \vdash A_0$ sind $\Rightarrow \vee \angle A_1, ..$ zu $\mathfrak{S}_1$ hinzuzufügen. A $\angle$ B ist ableitbar, genau wenn $\vee \angle A \rightarrow B$ ableitbar ist; daher könnte man statt mit $\angle$ auch mit einem einstelligen Relator $_S$w (w ist Satzschema) arbeiten.

2.11 Theorem 1. *Deduzierbar rekursiv definierte Prädikatschemata mit demselben Definiens stimmen, bei derselben Bedingung und unter derselben Hypothese, (relativ bedingt) bisubjunktiv überein:*

$$\vdash C \ddot{\rightarrow} P \overset{k}{y} \dot{\rightarrow} (C\,P\,R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A \overset{k}{y}) \leftrightarrow (C\,P\,R_1 \rightarrow \pi \overset{k}{x} A \overset{k}{y});$$

die Variablengebote seien aus 9.3.24, 25 übernommen (hinsichtlich beider Fundierungen R, R_1).

---

[12] Man beachte den Wechsel im Gebrauch des Symbols $\vdash$: das offizielle $\vdash_{\mathfrak{S}_1} \angle {}^{\cup}\vee \circ$ u (aus **0.12**) geht über in das inoffizielle $\vdash_{\mathfrak{S}_1}$ u (aus **0.21**).

Beweis. Man greife hinsichtlich R und C, P, A auf 9.1.5 zurück, um das $\dot{\rightarrow}$-Sukzedens in Theorem 1 aufgrund (1) in **1.632** formal-induktiv abzuleiten. Dazu kopiere man die Deduktion von (1) für das $\dot{\rightarrow}$-Sukzedens als Induktionsaussageform anstelle $\rho \overset{k}{y}$, „unterwegs" eventuell auf kongruenten Umleitungen — am Ende erscheint aber die Induktionsaussageform selbst, da sie in (1) konfusionslos substituierbar ist. Dann führe man den Induktions*schritt* $C \angle P\overset{k}{y} \dot{\rightarrow} \bigwedge^k_z * \cdot \rightarrow *$; nämlich indem sich aus der Induktions*annahme* $P\overset{k}{y} \wedge \bigwedge^k_z *$ dank (2) in **1.632**, wieder notfalls auf kongruenten Umleitungen, $A(\overset{k}{y}, CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A) \leftrightarrow A(\overset{k}{y}, CPR_1 \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)$ ergibt, also nach (3) in **1.632**, da $P\overset{k}{y}$, auch die Induktions*behauptung* $(CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A \overset{k}{y}) \leftrightarrow (CPR_1 \rightarrow \pi \overset{k}{x} A \overset{k}{y})$. Der Induktionsschritt beweist nun die Induktions*voraussetzung* $C \angle \bigwedge^k_y *$, diese mit (1) die Induktions*folgerung* $C \angle P\overset{k}{y} \rightarrow *$, w. z. z. w.

2.12 Derlei einfache Induktionen durch Induktionsschritt unterdrücken wir fortan als trivial. Sie tauchen naturgemäß bereits auf, wenn z. B. die Umbenennung für gebundene Marken rekapituliert wird.

Wegen (2) kann in (3) für $CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$ in $A(\overset{k}{y}, CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)$ auch der „Abschnitt" $CP^{R}{}^{k}_{y} R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$ mit $P^{R}{}^{k}_{y} \leftrightharpoons (\vee) \vee \wedge \rightarrow \overset{k}{\pi}{}' \overset{k}{z} (P\overset{k}{z} \wedge R\overset{k}{z}\overset{k}{y})$ eingesetzt werden. ($\leftrightharpoons$ wird über 10.1, 2 hinaus als Abbreviationssymbol benutzt.) Solche Abschnitte sind mit ebensolchen Abschnitten definierbar; aber Abschnitte von Abschnitten sind nicht ohne weiteres wieder Abschnitte, denn R braucht ja nicht transitiv zu sein. Der Ansatz (3) richtet sich im Interesse formaler Einfachheit sofort auf $CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$; ein auf die zugehörige Abschnittsform ausgehender Ansatz würde auf Implikationsformen (1), (2) fußen, die zwar auch beweisbar sind — aber (relative bedingte) explizite Definitionen, ohne die $CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A$ selbst nicht aus der zugehörigen Abschnittsform hervorgeht, blieben dann gesondert anzusetzen.

2.2 Definition 1. $\neg A$ (: lies 'nicht A') stehe für $(A \rightarrow (\wedge))$. Die bekannte stabilisierende Übersetzung, die A auf $^\circ A$ abbildet, indem $^\circ(P\overset{k}{t})$, $^\circ(A \rightarrow B)$, $^\circ(A \wedge B)$, $^\circ(A \vee B)$, $^\circ \bigvee x\, A$, $^\circ \bigwedge x\, A$ nacheinander für $(P\overset{k}{t})$, $(^\circ A \rightarrow {}^\circ B)$, $(^\circ A \wedge {}^\circ B)$, $\neg(\neg\, {}^\circ A \wedge \neg\, {}^\circ B)$ $[\leftrightarrow \neg\neg(^\circ A \vee {}^\circ B)]$, $\neg \bigwedge x \neg\, {}^\circ A$ $[\leftrightarrow \neg\neg \bigvee x\, {}^\circ A]$, $\bigwedge x\, {}^\circ A$ stehen, sei abgeändert und ergänzt durch die Vorschrift, daß $^\circ(P\overset{k}{t})$ für $(^\circ P\overset{k}{t})$ steht und $^\circ\leq$, $^\circ\vee$, $^\circ\wedge$, $(^\circ\pi\overset{k}{t})$, $^\circ(CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)$ [13], $^\circ \bigwedge \pi A$, $^\circ \bigvee \pi A$ nacheinander für $\leq$, $\vee$, $\wedge$, $\neg\neg(\pi\overset{k}{t})$, $(CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x}\, {}^\circ A)$, $\bigwedge \pi\, {}^\circ A$, $\neg \bigwedge \pi \neg\, {}^\circ A$ $[\leftrightarrow \neg\neg \bigvee \pi\, {}^\circ A]$.

[13] Ohne Klammer säße $^\circ$ auf C.

Definition 2. $^{\bullet\circ}$A entstehe aus $^{\circ}$A, indem jedes $(^{\circ}\pi \overset{k}{t})$ nur dann mit $\neg\neg(\pi \overset{k}{t})$ übersetzt wird, wenn 1. A für ein $(\pi \overset{k}{t})$ steht, oder wenn 2. das betreffende π-Exemplar in A nicht oder „mittelbar" $\rightarrowtail$-gebunden ist *und* in A unmittelbar mit $\wedge$ oder $\bigwedge x$ oder $\bigwedge \pi$ zusammengesetzt oder unmittelbar $\rightarrow$-Sukzedens ist oder sich (mit seinem $\overset{k}{t}$) allein im Wirkungsstück eines (nicht π bindenden) Rekursors befindet — sonst jedoch mit $(\pi \overset{k}{t})$ übersetzt wird. Ein π-Exemplar heiße dabei in A mittelbar $\rightarrowtail$-gebunden, wenn es im Definiens desjenigen Rekursors, durch welchen es gebunden wird, noch im Wirkungsstück eines anderen Rekursors oder mehrerer solcher liegt.

Definition 3. $^{\rho\bullet\circ}$A entstehe aus $^{\bullet\circ}$A, indem $\neg\neg$ unmittelbar vor jedem nicht gebundenen Exemplar der speziellen Marke ρ getilgt wird — soweit diese $\neg\neg$ von $^{\bullet\circ}$ verursacht sind —, *wenn* nicht das betreffende ρ-Exemplar im Wirkungsstück (Definiens) wenigstens eines Rekursors liegt.

In Definition 1 kann '$^{\circ}$' durch '$^{\bullet\circ}$' ersetzt werden, *außer* daß $^{\bullet\circ}(\mathrm{CPR} \rightarrowtail \pi \overset{k}{x} A)$ für $(\mathrm{CPR} \rightarrowtail \pi \overset{k}{x}\, {}^{\pi\bullet\circ}A)$ steht; daß $^{\bullet\circ}(A \rightarrow B)$ für $(A \rightarrow {}^{\bullet\circ}B)$ steht, falls A für ein $(\pi \overset{k}{t})$ steht; daß $^{\bullet\circ}(A \vee B)$ für $\neg\neg(A \vee {}^{\bullet\circ}B)$, $\neg\neg({}^{\bullet\circ}A \vee B)$, $\neg\neg(A \vee B)$ steht, falls beziehentlich A für $(\pi \overset{k}{t})$, B für $(\rho \overset{l}{s})$, A für $(\pi \overset{k}{t})$ und B für $(\rho \overset{l}{s})$ steht; und daß $^{\bullet\circ}\bigvee x A$ für $\neg\neg\bigvee x A$ sowie $^{\bullet\circ}\bigvee \pi A$ für $\neg\neg\bigvee \pi A$ steht, falls A für $(\rho \overset{k}{t})$ steht.

Definition 4. A heiße hinsichtlich C, P, R *selbständig* deduzierbar rekursiv definierend, wenn (1) in **1.632** und

$$(^{\bullet\circ}2) \qquad C \angle P \overset{k}{y} \ddot{\rightarrow} \bigwedge \overset{k}{z}(P \overset{k}{z} \ddot{\rightarrow} R \overset{k}{z} \overset{k}{y} \dot{\rightarrow} \pi_1 \overset{k}{z} \leftrightarrow \pi_2 \overset{k}{z}) \dot{\rightarrow}$$
$$\dot{\rightarrow} {}^{\pi_1\bullet\circ}A(\overset{k}{y}, \pi_1) \leftrightarrow {}^{\pi_2\bullet\circ}A(\overset{k}{y}, \pi_2)$$

in $\mathfrak{S}_1$ ableitbar sind; die Variablen- und Markengebote seien aus 9.1.5 übernommen.

Indem C, P, R in $((\mathrm{CPR} \rightarrowtail \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{t})$ von $^{\circ}$ wie von $^{\bullet\circ}$ nicht affiziert werden, kann (1) für beide Übersetzungen von $C \overset{R}{\underset{P}{\rightarrowtail}} {}^{k}_{\pi x}A$ unverändert übernommen werden. Man darf schon im absoluten unbedingten Fall nicht erwarten, etwa von $I(\vee, R)$ [14] auf $I(\vee, {}^{\circ}R)$ schließen zu können, sofern nicht R in $\mathfrak{S}_1$ entscheidbar ist; und $^{\bullet\circ}I(\vee, R)$ schwächt im allgemeinen nicht nur R sondern auch die Induktionsfolgerung so ab $(: \neg\neg\rho \overset{k}{y})$, daß sie im konstruktiven Sinn von 9.1.5 als Definitionsprämisse unbrauchbar ist.

---

[14] Zu I vgl. **0.21** und **0.24**.

Daß ein durch Übersetzung geschwächtes Induktionsschema als Konklusion noch zur konstruktiven Auslegung einer Induktionsaxiomform (mit aufgezählten Induktionsaussageformen) aus einem Formalismus klassischer transfiniter Arithmetik verwendbar sein mag, steht auf einem anderen Blatt.

Die Definitionsprämisse (2) wird für die $^{\bullet\circ}$-Übersetzung von $\mathrm{C} \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{P}}{\rightarrow}} {}_{\pi\mathrm{x}}^{k}\mathrm{A}$, nämlich $\mathrm{C} \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{P}}{\rightarrow}} {}_{\pi\mathrm{x}}^{k}\,{}^{\pi\bullet\circ}\mathrm{A}$, in Gestalt der „Selbständigkeits"eigenschaft ($^{\bullet\circ}$2) schlechthin postuliert. Eine Deduktion von ($^{\bullet\circ}$2) nach Vorlage einer solchen von (2) mißlingt nur, wenn die Rekursion „unselbständig" fundiert ist, indem R oder P, wofern unentscheidbar in $\mathfrak{S}_1$, oder von P, R abhängige Prädikate in das Definiens A eingehen.

Kopiert man eine Deduktion von ($^{\bullet\circ}$2) unter Substitution von $\neg\neg(\pi_1 *)$, $\neg\neg(\pi_2 *)$ für $(\pi_1 *)$, $(\pi_2 *)$, so entsteht eine Deduktion von

$$\mathrm{C} \angle \mathrm{P}\,\overset{k}{\mathrm{y}} \ddot{\rightarrow} \bigwedge \overset{k}{\mathrm{z}}(\mathrm{P}\,\overset{k}{\mathrm{z}} \ddot{\rightarrow} \mathrm{R}\,\overset{k}{\mathrm{z}}\,\overset{k}{\mathrm{y}} \dot{\rightarrow} \neg\neg\pi_1\overset{k}{\mathrm{z}} \leftrightarrow \neg\neg\pi_2\overset{k}{\mathrm{z}}) \dot{\rightarrow}$$
$$\dot{\rightarrow}\, {}^{\bullet\circ}\mathrm{A}(\overset{k}{\mathrm{y}}, \pi_1) \leftrightarrow {}^{\bullet\circ}\mathrm{A}(\overset{k}{\mathrm{y}}, \pi_2),$$

nachdem etwa entstandene $\neg\neg\neg\neg(\pi_{1,2} *)$ im Wirkungsstück von Rekursoren wieder durch $\neg\neg(\pi_{1,2} *)$ ersetzt worden sind — weil ja $\vdash \neg\neg\neg\,\mathrm{D} \leftrightarrow \neg\,\mathrm{D}$ infolge $\vdash \mathrm{D} \rightarrow \neg\neg\,\mathrm{D}$ und 'Kontraposition' $\vdash (\mathrm{D}_1 \rightarrow \mathrm{D}_2) \rightarrow (\neg\,\mathrm{D}_2 \rightarrow \neg\,\mathrm{D}_1)$. Das jetzige $\dot{\rightarrow}$-Antezedens vor $^{\bullet\circ}$A folgt noch aus dem homologen $\dot{\rightarrow}$-Antezedens in ($^{\bullet\circ}$2), und daher gilt, *wenn* ($^{\bullet\circ}$2) abgeleitet ist, auch die Variante

$$(^{\bullet\circ}2') \qquad \mathrm{C} \angle \mathrm{P}\,\overset{k}{\mathrm{y}} \ddot{\rightarrow} \bigwedge \overset{k}{\mathrm{z}}(\mathrm{P}\,\overset{k}{\mathrm{z}} \ddot{\rightarrow} \mathrm{R}\,\overset{k}{\mathrm{z}}\,\overset{k}{\mathrm{y}} \dot{\rightarrow} \pi_1\overset{k}{\mathrm{z}} \leftrightarrow \pi_2\overset{k}{\mathrm{z}}) \dot{\rightarrow}$$
$$\dot{\rightarrow}\, {}^{\bullet\circ}\mathrm{A}(\overset{k}{\mathrm{y}}, \pi_1) \leftrightarrow {}^{\bullet\circ}\mathrm{A}(\overset{k}{\mathrm{y}}, \pi_2).$$

2.21 Theorem 2. *(Partielle Stabilisierung.)* 1. $\vdash {}^{\bullet\circ}\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}$ *gilt für Aussageformen* A *jedenfalls dann, wenn* A *selbst und die Definientes der am definitorischen Aufbau von* A *beteiligten deduzierbar rekursiv definierten Prädikatschemata, die überdies sämtlich als -formen vorausgesetzt seien, einen logischen Aufbau ohne* $\vee$, $\bigvee \mathrm{x}$, $\bigwedge \pi$, $\bigvee \pi$ *zeigen.* 2. *Für jedes Aussageschema* A, *das sich definitorisch durchgängig — im ganzen Stammbaum — aus* $\leq$, $\bigvee$, $\bigwedge$, π *und absolut unbedingt selbständig deduzierbar rekursiv definierten Prädikatschemata aufbaut, ist* $^{\circ}$A *stabil, d.h.* $\vdash \neg\neg\,{}^{\circ}\mathrm{A} \rightarrow {}^{\circ}\mathrm{A}$. 3. *Für die* ad 2. *genannten* A *gilt* $\vdash {}^{\bullet\circ}\mathrm{A} \leftrightarrow {}^{\circ}\mathrm{A}$. 4. *Schränkt man den Deduktionsprozeß* 9.3.1—30 *auf die* ad 2. *genannten* A *ein, fügt* $\bigvee \angle \mathrm{A} \vee \neg\mathrm{A}$ *hinzu und bezeichnet den so modifizierten, sich bei ausdrücklich gesperrter Rückkopplung via* 9.1.5 *entfaltenden Ableitbarkeitsbegriff mit* $\vdash'$, *so gilt* $^{\circ}\mathrm{A}_1, .., {}^{\circ}\mathrm{A}_n \vdash {}^{\circ}\mathrm{A}$, *wenn* $\mathrm{A}_1, .., \mathrm{A}_n \vdash' \mathrm{A}$ *gilt; insbesondere für* $n = 0$. (2.—4. relativ bedingt zu formulieren, würde weitere vorbereitende Definitionen erheischen.)

Beweise. Ad 1. $^{\bullet\circ}$A steht in den genannten Fällen für A: zunächst bei Primaussageformen aus den Primprädikaten $\leq$, $\bigvee$, $\bigwedge$; dann beim

Aufbau mit $\rightarrow$, $\wedge$, $\bigwedge x$, falls schon bei den Teilaussageformen; endlich bei nicht primitiven Primaussageformen $((\mathrm{CPR} \rightarrow \pi \overset{k}{x} B) \overset{k}{t})$, falls schon bei den am logischen Aufbau von B eventuell beteiligten nicht primitiven Primaussageformen, denn ad 1. steht ${}^{\pi\bullet\circ}B$ für B. (Die ad 1. am definitorischen Aufbau von A beteiligten Prädikatformen sind automatisch selbständig deduzierbar rekursiv definiert.)

Ad 2., 3. simultan. Jede Primaussageform aus $\leq$, $\vee$, $\wedge$ ist stabil; bei solchen A steht ${}^\circ A$ für A. $\neg\neg(\pi \overset{k}{t})$ ist stabil wegen $\vdash \neg\neg\neg D \rightarrow \neg D$; $^\circ$- wie $^{\bullet\circ}$-Übersetzung von $(\pi \overset{k}{t})$ heißen $\neg\neg(\pi \overset{k}{t})$. ${}^\circ(A \rightarrow B)$ ist stabil, falls schon ${}^\circ B$ stabil ist, denn $\vdash \neg\neg(D_1 \rightarrow D_2) \leftrightarrow (D_1 \rightarrow \neg\neg D_2)$; wenn 3. schon für A, B gilt, dann auch für $(A \rightarrow B)$, wobei, falls A für ein $(\pi \overset{k}{t})$ steht, zwar 3. für B genügt, aber die Stabilität von ${}^\circ B$ sowie $\vdash (\neg\neg D_1 \rightarrow \neg\neg D_2) \leftrightarrow (D_1 \rightarrow \neg\neg D_2)$ heranzuziehen ist. Die Stabilität vererbt sich von ${}^\circ A$, ${}^\circ B$ auf ${}^\circ(A \wedge B)$, denn $\vdash \neg\neg(D_1 \wedge D_2) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \neg\neg D_1 \wedge \neg\neg D_2$; 3. vererbt sich von A, B auf $(A \wedge B)$. Analog bei $\bigwedge x$, $\bigwedge \pi$ anstelle $\wedge$, obwohl lediglich $\vdash \neg\neg \bigwedge x\, D \rightarrow \bigwedge x \neg\neg D$ und entsprechend für π statt x. ${}^\circ(A \vee B)$ ist wieder stabil, weil $\vdash \neg\neg\neg D \rightarrow \neg D$; 3. vererbt sich von A, B auf $(A \vee B)$, wobei, falls A für $(\pi \overset{k}{t})$ oder B für $(\rho \overset{l}{s})$ steht, oder beides, $\vdash \neg(D_1 \vee D_2) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \neg D_1 \wedge \neg D_2$ und die Stabilität von $\neg(\pi \overset{k}{t}), \neg(\rho \overset{l}{s})$ zu beachten ist. Ähnlich bei $\bigvee x$, unter Beachtung von $\vdash \neg \bigvee x\, D \leftrightarrow \bigwedge x \neg D$; desgleichen für π statt x. ($^\circ$ und $^{\bullet\circ}$ beeinträchtigen eine deduktive Variation von Variablen und Marken in 2., 3. zu Ersetzungszwecken nicht.)

Bei einem nicht primitiven Primaussageschema $(((\vee) \vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A) \overset{k}{t})$, das einem selbständig deduzierbar rekursiv definierten Prädikatschema entspringt, sei 2., 3. schon bewiesen für die am logischen Aufbau von A eventuell beteiligten nicht primitiven (ad 2., 3. eo ipso absolut unbedingt selbständig deduzierbar rekursiv definierten) Primaussageschemata, ebenso für A selbst. Aus ($^{\bullet\circ}$2) für $(\vee)$, $\vee$ anstelle C, P folgt, dank 3. für A, über ($^{\bullet\circ}$2′) hinaus

$$(^\circ 2) \qquad \vdash \bigwedge \overset{k}{z} (R \overset{k}{z} \overset{k}{y} \dot{\rightarrow} \pi_1 \overset{k}{z} \leftrightarrow \pi_2 \overset{k}{z}) \dot{\rightarrow} {}^\circ A(\overset{k}{y}, \pi_1) \leftrightarrow {}^\circ A(\overset{k}{y}, \pi_2),$$

also die Definitionsprämisse (2) für $(\vee) \vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x}\, {}^\circ A$. Nunmehr liefert (1) für $(\vee)$, $\vee$ anstelle C, P, zusammen mit ($^\circ$2), an Hand 9.3.24, 25 und Definition 1:

$$(^\circ 3) \qquad \vdash {}^\circ A(\overset{k}{y}, {}^\circ((\vee) \vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)) \leftrightarrow {}^\circ(((\vee) \vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A) \overset{k}{y}),$$

wonach sich 2. für $(((\vee) \vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A) \overset{k}{t})$ aus 2. für $A(\overset{k}{x}, \pi)$ — so ursprünglich, vor Substitutionen — ergibt, indem man die Ableitung der ${}^\circ A$-Stabi-

lität durch passende Kopie, notfalls erst kongruent umleitend, derart umformt, daß $\overset{k}{t}$, $^\circ((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)$ für $\overset{k}{x}$, π in $^\circ A(\overset{k}{x}, \pi)$ substituiert ist.

Bleibt 3. für $(((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{t})$ zu zeigen, und zwar durch absolute unbedingte Induktion bezüglich R für die behauptete Bisubjunktion zwischen $^{\bullet\circ}$- und $^\circ$-Übersetzung. (1), ($^{\bullet\circ}$2) mit $(\vee)$, $\vee$ anstelle C, P liefern gemäß 9.3.24, 25 und Definitionen 2, 3:

$$(^{\bullet\circ}3) \qquad \vdash {}^{\pi\bullet\circ}A(\overset{k}{y}, {}^{\bullet\circ}((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)) \leftrightarrow {}^{\bullet\circ}(((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{y}).$$

Die Induktionsannahme

$$\wedge_z^k R z \overset{k}{y} \dot{\rightarrow} {}^{\bullet\circ}(((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{z}) \leftrightarrow {}^\circ(((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{z})$$

führt wegen des letzten Beweisschrittes ad 2. zunächst zu

$$\wedge_z^k R z \overset{k}{y} \dot{\rightarrow} \neg\neg\, {}^{\bullet\circ}(((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{z}) \leftrightarrow {}^{\bullet\circ}(((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{z}),$$

dies mittels ($^{\bullet\circ}$2) durch passende Kopie (und $\neg\neg\neg\neg$-Reduktion, wo nötig) zu

$${}^{\bullet\circ}A(\overset{k}{y}, {}^{\bullet\circ}((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)) \leftrightarrow {}^{\pi\bullet\circ}A(\overset{k}{y}, {}^{\bullet\circ}((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A));$$

durch passende Kopie aus 3. für A folgt

$${}^{\bullet\circ}A(\overset{k}{y}, {}^{\bullet\circ}((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)) \leftrightarrow {}^\circ A(\overset{k}{y}, {}^{\bullet\circ}((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)),$$

und schließlich führt die Induktionsannahme mittels ($^\circ$2) noch, passend kopiert, zu

$${}^\circ A(\overset{k}{y}, {}^{\bullet\circ}((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)) \leftrightarrow {}^\circ A(\overset{k}{y}, {}^\circ((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)).$$

An Hand der 3 letzten Bisubjunktionen und laut ($^{\bullet\circ}$3), ($^\circ$3) ist damit der Induktionsschritt geleistet, wonach auch

$$\vdash {}^{\bullet\circ}(((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{t}) \leftrightarrow {}^\circ(((\vee)\vee R \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)\overset{k}{t})$$

leicht erzielt wird.

Ad 4. Der Deduktionszusammenhang wird bei $^\circ$-Abbildung einer $\vdash'$-Ableitung nirgends zerrissen, da $\vdash \neg\neg(D \vee \neg D)$. Sonst handelt es sich um Anwendung derselben Regeln 9.3.1—30 auf $^\circ$-geschwächte Aussageschemata, bei 9.3.6, 7, 13, 29 ergänzt durch $\vdash D \rightarrow \neg\neg D$ für das Konklusionsimplikat, bei 9.3.8, **14**, 30 durch doppelte Kontraposition der Konklusion mit nachträglicher Anwendung von 2. für das Implikat, bei 9.3.24, 25 durch Rückgriff auf ($^\circ$3) ad 2., 3.; bei 9.3.26, das keine $^\circ$-geschwächte Anwendung vorsieht, folgt das $^\circ$-Bild durch doppelte Kontraposition des Konklusionsimplikats. Bei 9.3.27, 29 ist noch zu berücksichtigen, daß für die ad 2. genannten A und Q das $^\circ$-Bild des Ergebnisses der Substitution von Q für π in A, $^\circ(A(Q))$, mit

dem Ergebnis der Substitution von °Q für π in °A, °A(°Q)), bisubjunktiv übereinstimmt: $°Q\overset{k}{t}$ ist nach 2. stabil, so daß die $\neg\neg$ vor π in °A und damit vor °Q in °A(°Q) wegfallen dürfen — genau wie in °(A(Q)). Dies beendet die Beweise zu Theorem 2.[15]

2.22 Wie weit eine derartige formale Rechtfertigung des tertium-non-datur auch trägt, für den Intuitionismus bleibt dessen Wahrheit auf je Endliches begrenzt und da, wo es darüber hinaus formal ohne Widerspruch anwendbar ist, inhaltlich eine sekundäre Scheinwahrheit. Im Unterschied zu einfacheren arithmetischen Formalismen, wo das tertium-non-datur total eliminierbar ist, macht das differierende Wahrheitsniveau sich hier auch formal bemerkbar — die Rekursorbestandteile C, P, R entziehen sich der Stabilisierung und 9.1.5 muß für $\vdash'$ unterbunden werden.

2.3 Auf dem Weg zu einem (finit kontrollierbaren) konstruktiven Widerspruchsfreiheitsbeweis für die (formalisierte) axiomatische Mengenlehre [1, 2, 6] kommt es vor allem darauf an, in beträchtlichem Ausmaß mit Ordinalzahlen zu operieren, ohne dabei den Rahmen dessen zu überschreiten, was in konstruktive Wahrheit übersetzt oder umgedeutet werden kann. Nachdem Ordinalzahlen einmal zur Numerierung von (konstruktiblen) Mengen dienen [6], kann man $\in$ auch rein ordinalzahltheoretisch definieren [19, 20][16]; der Vorteil besteht, von $\mathfrak{S}_1$ aus beurteilt, darin, daß sich die Eigenschaften der Ordinalzahlwohlordnung $\leq$ noch für variable transfinite Terme konstruktiv weitgehend nachvollziehen lassen, während eine Darstellung von Mengen mit $\in_x A(x)$ dafür rasch zu höheren Konstruktionen $\mathfrak{S}_\alpha$ veranlaßt.

Wir prüfen nun, wie die in [21] (Etappe I) vorgeschlagene Darstellung der Ordinalzahlwohlordnung $\leq$, die mit Hilfe eines Niveauvergleichs zweier Ordinalzahlrepräsentanten $\vdash I(P, R)$, $\vdash I(Q, S)$ arbeitet, zur konstruktiven Deduktion von Sätzen hinführt, in denen eine übersetzte Wiedergabe einiger zentraler Axiome der Ordinalzahltheorie steckt.

2.31 Der Zusammendrängung halber sei $\bigwedge x_p A$ bzw. $\bigwedge_{\substack{x\\p}} A$ anstelle $\bigwedge x(Px \to A)$ bzw. $\bigwedge_x Px \to A$ notiert, ebenso $\bigvee x_p A \leftrightarrows \bigvee x(Px \wedge A)$ und $\bigvee_{\substack{x\\p}} A \leftrightarrows \bigvee_x Px \wedge A$. Der Übersicht wegen schreiben wir gelegentlich sogar p statt x_p, q statt y_p, ..; wo solche bedingten Variablen frei

[15] Anläßlich des 4. Kolloquiums für mathematische Logik und Grundlagenforschung am 18. bis 20. November 1954 in Marburg/Lahn habe ich einen Vortrag „Über die Eliminierbarkeit des tertium non datur bei induktiven Definitionen" gehalten, der sich auf den Inhalt dieses Theorems richtete.

[16] Als ich [22, 23] schrieb, hatte ich keine Kenntnis von [19, 20]. Ich danke G. Takeuti für zahlreiche Informationen seit der Begegnung in Stanford.

vorkommen, ist $A(p) \leftrightharpoons Px \to A(x), ..$ zu lesen (genauer [11] p. 420, Zeile 13—20). Da eventuell $P \leftrightharpoons \wedge$, wollen wir hier jedoch nicht mit p, q, .. selbst deduktiv umgehen, sondern halten uns an die ausführliche Lesart der Abkürzungen; dies unterbindet Schlüsse, die, wie $\wedge p\, D(p) \to \to \vee p\, D(p)$, eventuell falsch werden. Indizes seien verschieden bedingten Variablen vorbehalten, also p_1 statt x_{P_1}, ...

Um den Niveauvergleich zweier Ordinalzahlrepräsentanten $\vdash I(P, R)$ und $\vdash I(Q, S)$ ganz allgemein, auch wenn diese Ableitungen hypothetisch sind, zu formulieren, definiere ich ${}^{R}_{P} \leq {}^{S}_{Q}$, [21] (Etappe I, 2. Absatz; Etappe II, 2. Absatz) entsprechend, so, daß (3) in **1.632** für ${}^{R}_{P} \leq {}^{S}_{Q}$ als ein 2-stelliges Prädikat(schema) folgendermaßen aussieht:

$$\text{(D1)} \qquad I(P, R) \wedge I(Q, S) \angle P \times Q\, x_0 y_0 \dot{\to} x_0\, {}^{R}_{P} \leq {}^{S}_{Q}\, y_0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{P} {}_x R x x_0 \to \bigvee_{Q} {}_y S y y_0 \wedge x\, {}^{R}_{P} \leq {}^{S}_{Q}\, y\,,$$

wobei $P \times Q\, x_0 y_0 \leftrightarrow P x_0 \wedge Q y_0$; eine Fundierung von (D1) geschieht (laut [21], p. 269, Zeile 21—22) hinsichtlich $R \times S\, x y x_0 y_0 \leftrightarrow R x x_0 \wedge S y y_0$. Wie man die $\times$ via $(\vee) \overset{\wedge}{\vee}\!\!\to_*$ * und ${}^{R}_{P} \leq {}^{S}_{Q}$ via $C\, {}^{R \times S}_{P \times Q}\!\!\to_*$ * offiziell ausdrückt, ist klar. Auf die zu ${}^{R}_{P} \leq {}^{S}_{Q}$ gehörigen Definitionsprämissen (1), (2) kommen wir in **2.32** zurück.

Der Umstand, daß (D1) im allgemeinen unselbständig fundiert ist (wofern nicht gerade P, R, Q, S deduzierbar stabil sind), und der Wunsch, möglichst viel an klassischer Ordinalzahltheorie im Übersetzungsweg zu „retten", geben Veranlassung, die Definientes für Prädikate, Prädikatformen oder -schemata, die eine Ordinalzahl, einen beschränkten oder einen unbeschränkten Ordinalzahlterm repräsentieren, von der $^{\bullet\circ}$- und $^{\circ}$-Stabilisierung in Definitionen wie Deduktionen auszunehmen. Dementsprechend stelle ich (D1) die folgende (ebenfalls bei $P \times Q$ hinsichtlich $R \times S$ fundierte) relative bedingte, gemäß **2.32** gleichfalls deduzierbar rekursive Definition für einen „halb"stabilisierten Niveauvergleich ${}^{R}_{P} \overset{\frown}{\leq} {}^{S}_{Q}$ zur Seite:

$$\text{(}^{\frown}\text{D1)} \qquad I(P, R) \wedge I(Q, S) \angle P \times Q\, x_0 y_0 \dot{\to} x_0\, {}^{R}_{P} \overset{\frown}{\leq} {}^{S}_{Q}\, y_0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{P} {}_x R x x_0 \to \neg\neg \bigvee_{Q} {}_y S y y_0 \wedge x\, {}^{R}_{P} \overset{\frown}{\leq} {}^{S}_{Q}\, y\,.$$

2.311 Nachdem der Niveauvergleich (D1) erfolgt ist, wird laut [21] (p. 268) ein Ordinalzahlvergleich $\leq$ als 0-stelliges Prädikat(schema) explizit —hier relativ explizit— definiert, dessen Definiens dem in (D1) ähnelt:

$$\text{(D2)} \qquad I(P, R) \wedge I(Q, S) \angle PR \leq QS \leftrightarrow \bigwedge_{P} {}_x \bigvee_{Q} {}_y\, x\, {}^{R}_{P} \leq {}^{S}_{Q}\, y\,.$$

Daneben tritt, gleichlautend von ($^{\frown}$D1) her übertragen, ein halb-

stabilisierter Ordinalzahlvergleich $\overset{\frown}{\leq}$:

$$({}^{\frown}\mathrm{D}2) \qquad \mathrm{I}(P,R) \wedge \mathrm{I}(Q,S) \angle PR \overset{\frown}{\leq} QS \leftrightarrow \bigwedge_{P} x \neg\neg \bigvee_{Q} y\, x \overset{R}{P} \overset{\frown}{\leq} \overset{S}{Q}\, y\,.$$

In (D2) wird (D1) und in (${}^{\frown}$D2) wird (${}^{\frown}$D1) nicht über die Bedingung $P \times Q$ hinaus beansprucht, da in (D2) ein weiteres Px hinter $\bigvee y$ geschafft und von dort wieder beseitigt werden kann, in (${}^{\frown}$D2) ebenso dank $\vdash D \rightarrow \neg\neg D$, $\vdash \neg\neg D_1 \wedge \neg\neg D_2 \leftrightarrow \neg\neg (D_1 \wedge D_2)$.

Die Frage, ob das im allgemeinen instabile (und nicht stabilisierbare) Fundierungsmaterial, das $\mathfrak{S}_1$ zur Ordinalzahldarstellung produziert, von $\overset{\frown}{\leq}$ ausgehend mit einer konstruktiv gestützten halbstabilisierten „Fassade" so verkleidet werden kann, daß sich formal auf ihr transfinite klassische Arithmetik treiben läßt, findet bald eine bejahende Antwort. $\overset{\frown}{\leq}$ liefert insbesondere die natürliche (schwache) Halbwohlordnung zwischen Ordinalzahlrepräsentanten, die der natürlichen Wohlordnung der von ihnen (klassisch) dargestellten Ordinalzahlen entspricht — „derselben" Ordinalzahl entsprechen viele Repräsentanten.

2.32 Die Unabhängigkeitsprämisse (2) besagt im Fall (D1)

$$P \times Q\, x_0 y_0 \overset{\cdot\cdot}{\rightarrow} \bigwedge_{P \times Q} xy\, R \times S\, x y x_0 y_0 \overset{\cdot}{\rightarrow} \pi_1 x y \leftrightarrow \pi_2 x y \,.\, \overset{\cdot}{\rightarrow}$$
$$\overset{\cdot}{\rightarrow} \bigwedge_{P} x\, R x x_0 \rightarrow \bigvee_{Q} y\, S y y_0 \wedge \pi_1 x y \,..\, \leftrightarrow \bigwedge_{P} x\, R x x_0 \rightarrow \bigvee_{Q} y\, S y y_0 \wedge \pi_2 x y\,.$$

Die letzte Bisubjunktion läßt sich, dem logischen Aufbau des Definiens $A(x_0, y_0, \pi)$ von π aus parallel, durch Ersetzungen folgern, die dem $\overset{\cdot}{\rightarrow}$-Antezedens entspringen. (Variablen- und Markengebote bei Repräsentanten beschränkter oder unbeschränkter Ordinalzahlterme, die mit anonymen Variablen bzw. Marken in P, R, Q, S behaftet sind, trage man an Hand 9.1.5 und 9.3.24, 25 nach.) Im Fall (${}^{\frown}$D1) ergibt sich (2) analog.

Die Definitionsprämisse (1) für (D1) und (${}^{\frown}$D1) folgt — vgl. [21] (p. 269, Zeile 22—25) — aus

$$(\mathrm{o}\,1) \qquad \vdash \mathrm{I}(P,R) \vee \mathrm{I}(Q,S) \rightarrow \mathrm{I}(P \times Q, R \times S)\,.$$

Beweis. Es genügt, $\vdash \mathrm{I}(P, R; \hat{\pi}, x) \rightarrow \mathrm{I}(P \times Q, R \times S; \pi, xy)$ zu zeigen,[14] wozu $\hat{\pi} t \leftrightharpoons \bigwedge_{Q} y\, \pi t y$ gesetzt sei. (Symmetrisch dazu kann man auch mit $\mathrm{I}(Q, S; \bigwedge_{P} x\, \pi x *, y)$ anfangen.) Die Induktionsannahme bezüglich R „auf" P für $\hat{\pi}$ nach x impliziert insbesondere $P \times Q\, x_0 y_0 \overset{\cdot}{\rightarrow} \overset{\cdot}{\rightarrow} \bigwedge_{P \times Q} xy\, R \times S\, x y x_0 y_0 \rightarrow \pi x y$, also die Annahme bezüglich $R \times S$ auf $P \times Q$ für π nach xy. Die diesbezügliche Induktionsvoraussetzung liefert $\pi x_0 y_0$ für jedes y_0, das $Q y_0$, mithin die Induktionsbehauptung

$\hat{\pi} x_0$. Dieser Induktionsschritt von $I(P, R; \hat{\pi}, x)$ führt zur Induktionsfolgerung $Px \to \hat{\pi} x$, also zur Folgerung von $I(P \times Q, R \times S; \pi, xy)$.

2.321 *Bemerkung.* Der indirekte klassische Schluß vom Gegenbeispiel auf einen unendlichen Regreß ebensolcher (FERMATS descente infinie) oder die heuristisch noch wirksamere Widerlegung der Existenz eines minimalen Gegenbeispiels wird konstruktiv vom Induktionsschritt vertreten, um allgemein möglichst starke Induktionsfolgerungen zu erhalten. Demgegenüber wird der Schluß von einem unendlichen Regreß auf einen anderen, bereits widerlegten konstruktiv durch Transformation der Induktionsaussageform und Ausnutzung der Induktionsvoraussetzungen —statt bloß -annahmen— zu bewältigen gesucht, ohne dabei $\pi *$ durch $\neg\neg$ abzuschwächen.

Satz 1. *Es sei* $P \subseteq Q \leftrightharpoons \bigwedge_x Px \to Qx$, $R \subseteq S \leftrightharpoons \bigwedge_{xy} Rxy \to Sxy$, $R^P xy \leftrightharpoons Rxy \wedge Px \wedge Py$, *ferner* $\overset{*}{R}_P xy \leftrightharpoons \bigvee_z \overset{'z}{R}_P xy$, *wo* $\overset{z}{R}_P xy$ *nach* z *durch* $\overset{z}{R}_P xy \dot{\leftrightarrow} z = 0 \wedge x = y \dot{\vee} \bigvee_{z_0} z = {}'z_0 \wedge \bigvee_{z \atop P} \overset{z_0}{R}_P xz \wedge Rzy$ *rekursiv definiert sei; dann gilt*

(o 2) $\vdash P \subseteq Q \wedge I(Q, R) \to I(P, R)$, (o 4) $\vdash I(P, R^P) \leftrightarrow I(P, R)$,

(o 3) $\vdash R \subseteq S \wedge I(P, S) \to I(P, R)$, (o 5) $\vdash I(P, R) \leftrightarrow I(P, \overset{*}{R}_P)$.

($\subseteq$ ist, falls P, Q, R, S bei in $\mathfrak{S}_1$ unentscheidbaren Bedingungen ($: \nvdash P_0 x \vee \neg P_0 x$) definiert sind, im allgemeinen erst mit bedingten Quantoren ausdrückbar, worauf hier nicht näher eingegangen wird.)

Beweise. (o 2): substituiere $Pt \to \pi t$ für ρt in $I(Q, R; \rho, x)$ durch Kopie und wende, um auf $I(P, R; \pi, x)$ zu kommen, mehrmals Antezedenstausch sowie Absorption von Q durch $P \subseteq Q$ an. (o 3): die Annahme in $I(P, S; \pi, x)$ impliziert die Annahme in $I(P, R; \pi, x)$ wegen $R \subseteq S$; daraufhin folgt aus der Induktionsvoraussetzung in $I(P, R; \pi, x)$ die in $I(P, S; \pi, x)$; nunmehr ergibt sich $I(P, S; \pi, x) \to I(P, R; \pi, x)$. (o 4): $\leftarrow$ ergibt sich aus (o 3); für $\to$ beweise man $I(P, R^P; \pi, x) \to$ $\to I(P, R; \pi, x)$ durch Importation von Px in der Annahme von $I(P, R^P; \pi, x)$ sowie durch Versetzung eines (wiederholten) Px_0 hinter $\bigwedge_x$ in der Voraussetzung von $I(P, R; \pi, x)$, mit anschließender Importation von Px und Exportation nach Anwendung von $\vdash D_1 \wedge (D_2 \to D_3) \to$ $\to (D_1 \wedge D_2 \to D_3)$ innerhalb der dortigen Annahme.

(o 5): $\leftarrow$ ergibt sich aus (o 3) und (o 4), da $R^P xy \to \overset{*}{R}_P xy$; für $\to$ muß π in $I(P, R; \pi, x)$ variiert werden, nämlich zu $\hat{\pi} t \leftrightharpoons \bigwedge_z z = t \vee$ $\vee \overset{*}{R}_P zt \to \pi z$. Die Annahme $Px_0 \dot{\to} \bigwedge_{x \atop P} Rxx_0 \to \hat{\pi} x$ in $I(P, R; \hat{\pi}, x)$ im-

pliziert $P x_0 \dot{\to} \bigwedge_z \overset{*}{R}_P z x_0 \to \pi z$, denn $\overset{*}{R}_P z x_0 \to \bigvee_{\substack{x \\ P}} R x x_0 \dot{\wedge} z = x \vee \overset{*}{R}_P z x$ und für solche x gilt annahmegemäß $\hat{\pi} x$, mithin für z, für die $z = x \vee \overset{*}{R}_P z x$ (wegen $\overset{*}{R}_P z x_0$), πz. Da $\overset{*}{R}_P z x_0$ auch $P z$ nach sich zieht, impliziert die Annahme in $I(P, R; \hat{\pi}, x)$ die in $I(P, \overset{*}{R}_P; \pi, x)$. Nunmehr leistet die Induktionsvoraussetzung in $I(P, \overset{*}{R}_P; \pi, x)$ den Induktionsschritt von $I(P, R; \hat{\pi}, x)$, zu dem ja bloß noch πx_0 (zwecks $z = x_0 \to \pi z$) fehlt, und die Induktionsfolgerung $P x \to \hat{\pi} x$ aus $I(P, R; \hat{\pi}, x)$ enthält speziell, für $z = x$, die Induktionsfolgerung $P x \to \pi x$ von $I(P, \overset{*}{R}_P; \pi, x)$. (Beachte, daß bei $\overset{*}{R}_P$, $\overset{z}{R}_P$ ungeschwächte $\vee$, $\bigvee_*$ wesentlich sind.)

2.33 Satz 2.

(o 6) $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \ddot{\to} P \times Q\, x\, y \dot{\to} \neg\neg x \overset{R}{\underset{P}{\leq}} \overset{S}{\underset{Q}{\leq}} y \leftrightarrow x \overset{R}{\underset{P}{\overset{\cap}{\leq}}} \overset{S}{\underset{Q}{\leq}} y$,

(o 7) $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \dot{\to} \neg\neg P R \overset{\cap}{\leq} Q S \leftrightarrow P R \overset{\cap}{\leq} Q S$,

(o 8) $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \ddot{\to} P \times Q\, x\, y \dot{\to} x \overset{R}{\underset{P}{\leq}} \overset{S}{\underset{Q}{\leq}} y \to x \overset{R}{\underset{P}{\overset{\cap}{\leq}}} \overset{S}{\underset{Q}{\leq}} y$,

(o 9) $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \dot{\to} P R \leq Q S \to P R \overset{\cap}{\leq} Q S$.

Beweise. Die $P \times Q$-bedingte Stabilität von $\overset{R}{\underset{P}{\leq}} \overset{S}{\underset{Q}{\leq}}$ und die Stabilität von $\overset{\cap}{\leq}$ resultieren aus $\vdash \neg\neg \bigwedge x_P D_0 \to \bigwedge x_P \neg\neg D_0$, indem man $\vdash \neg\neg \bigwedge x D \to \bigwedge x \neg\neg D$ kraft $\vdash \neg\neg (P x \to D_0) \leftrightarrow (P x \to \neg\neg D_0)$ auf bedingte Variablen überträgt. (o 8), (o 9) findet man leicht, aus (D1), ($^{\cap}$D1) per Induktion und (D2), ($^{\cap}$D2).

Übrigens gilt auch $\vdash \neg \bigvee y_Q D_0 \leftrightarrow \bigwedge y_Q \neg D_0$, weil $\vdash \neg \bigvee y D \leftrightarrow \leftrightarrow \bigwedge y \neg D$, $\vdash \neg (Q y \wedge D_0) \leftrightarrow (Q y \to \neg D_0)$.

2.34 $\leq$, $\overset{\cap}{\leq}$ sind Halbordnungen, d.h. reflexiv und transitiv. Zum Beweis genügt nach (o 8), (o 9) der für

Satz 3. (o 10) $\vdash I(P, R) \dot{\to} P x \to x \overset{R}{\underset{P}{\leq}} \overset{R}{\underset{P}{\leq}} x$,

(o 11) $\vdash I(P, R) \to P R \leq P R$,

(o 12) $\vdash I(P_1, R_1) \wedge I(P_2, R_2) \wedge I(P_3, R_3) \ddot{\to}$
$\ddot{\to} P_1 \times P_2 \times P_3\, x_1\, x_2\, x_3 \dot{\to} x_1 \overset{R_1}{\underset{P_1}{\leq}} \overset{R_2}{\underset{P_2}{\leq}} x_2 \wedge x_2 \overset{R_2}{\underset{P_2}{\leq}} \overset{R_3}{\underset{P_3}{\leq}} x_3 \to x_1 \overset{R_1}{\underset{P_1}{\leq}} \overset{R_3}{\underset{P_3}{\leq}} x_3$,

(o 13) $\vdash I(P_1, R_1) \wedge I(P_2, R_2) \wedge I(P_3, R_3) \dot{\to}$
$\dot{\to} P_1 R_1 \leq P_2 R_2 \wedge P_2 R_2 \leq P_3 R_3 \to P_1 R_1 \leq P_3 R_3$;

(o 14), (o 15) *wie* (o 12), (o 13), *bloß mit* $\overset{\cap}{\leq}$ *anstelle* $\leq$, *auch bei* $\overset{*}{\underset{*}{\leq}}$.

Beweise. (o 10) resultiert durch P-bedingten Induktionsschritt bezüglich R für $x \overset{R}{\underset{P}{\leq}} \overset{R}{\underset{P}{\leq}} x$, da ja bei *gleich* (und zwar mittels $P x \wedge R x x_0$) bedingten Variablen p, q gilt $\vdash \bigwedge p D(p, p) \to \bigwedge p \bigvee q D(p, q)$; dies, mittels Bedingung P, auf (o 10) angewendet, führt zu (o 11).

(o 12) resultiert durch $P_1 \times P_2 \times P_3$-bedingten Induktionsschritt bezüglich $R_1 \times R_2 \times R_3$ für das $\dot{\rightarrow}$-Sukzedens, indem bei *verschieden* bedingten Variablen p_1, p_2, p_3 gilt

$$\vdash \bigwedge p_1 \bigvee p_2 D_{12}(p_1, p_2) \wedge \bigwedge p_2 \bigvee p_3 D_{23}(p_2, p_3) \rightarrow$$
$$\rightarrow \bigwedge p_1 \bigvee p_2 \bigvee p_3 (D_{12}(p_1, p_2) \wedge D_{23}(p_2, p_3)), \quad \text{falls } {}_{\not}p_3 D_{12},\ {}_{\not}p_1 D_{23},$$

wonach die Induktionsannahme auf eine Aussage $\bigwedge p_1 \bigvee p_3 D_{13}(p_1, p_3)$ führt. Analoge Schlüsse wie bei diesem Induktionsschritt liefern (o 13) aus (o 12).

Für (o 14), (o 15) haben wir uns, ganz entsprechend, lediglich noch von

$$\vdash \bigwedge p_1 \neg\neg \bigvee p_2 D_{12}(p_1, p_2) \wedge \bigwedge p_2 \neg\neg \bigvee p_3 D_{23}(p_2, p_3) \rightarrow$$
$$\rightarrow \bigwedge p_1 \neg\neg \bigvee p_2 \bigvee p_3 (D_{12}(p_1, p_2) \wedge D_{23}(p_2, p_3)), \text{ falls } {}_{\not}p_3 D_{12},\ {}_{\not}p_1 D_{23},$$

zu überzeugen. Nun gilt $\vdash D_1(p_2) \dot{\rightarrow} \bigwedge p_2 D_2(p_2) \rightarrow \bigvee p_2 (D_1(p_2) \wedge D_2(p_2))$.

also $\vdash \neg\neg \bigvee p_2 D_1(p_2) \dot{\rightarrow} \bigwedge p_2 D_2(p_2) \rightarrow \neg\neg \bigvee p_2 (D_1(p_2) \wedge D_2(p_2))$,

mithin insbesondere

$$\vdash \neg\neg \bigvee p_2 D_{12}(p_1, p_2) \wedge \bigwedge p_2 \neg\neg \bigvee p_3 D_{23}(p_2, p_3) \rightarrow$$
$$\rightarrow \neg\neg \bigvee p_2 (D_{12}(p_1, p_2) \wedge \neg\neg \bigvee p_3 D_{23}(p_2, p_3)),$$
$$\rightarrow \neg\neg \bigvee p_2 \neg\neg (D_{12}(p_1, p_2) \wedge \bigvee p_3 D_{23}(p_2, p_3)),$$
$$\rightarrow \neg\neg \bigvee p_2 \neg\neg \bigvee p_3 (D_{12}(p_1, p_2) \wedge D_{23}(p_2, p_3)), \text{ da } {}_{\not}p_3 D_{12},$$
$$\rightarrow \neg\neg \bigvee p_2 \bigvee p_3 (D_{12}(p_1, p_2) \wedge D_{23}(p_2, p_3))$$

und schließlich die anfängliche Behauptung, da ${}_{\not}p_1 D_{23}$.

2.35 Um die schwache Konnektivität $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \rightarrow \rightarrow \neg\neg(PR \overset{\frown}{\leq} QS \vee QS \overset{\frown}{\leq} PR)$ über schärfere Zwischenergebnisse zu erhalten, sei definiert

$$(^{\supset}D3) \qquad I(P, R) \wedge I(Q, S) \angle P \times Q\, x_0 y_0 \dot{\rightarrow} x_0 \overset{R}{\underset{P}{\overset{\supset}{>}}} \overset{S}{\underset{Q}{}} y_0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigvee_{\substack{x \\ P}} R x x_0 \wedge \bigwedge_{\substack{y \\ Q}} S y y_0 \rightarrow \neg\neg x \overset{R}{\underset{P}{\overset{\supset}{>}}} \overset{S}{\underset{Q}{}} y,$$

$$(^{\supset}D4) \qquad I(P, R) \wedge I(Q, S) \angle PR \overset{\supset}{>} QS \leftrightarrow \bigvee_{\substack{x \\ P}} \bigwedge_{\substack{y \\ Q}} \neg\neg x \overset{R}{\underset{P}{\overset{\supset}{>}}} \overset{S}{\underset{Q}{}} y.$$

(D3), (D4) sollen aus ($^{\supset}$D3), ($^{\supset}$D4) durch Tilgung der $^{\supset}$ und von $\neg\neg$ entstehen. Für ($^{\supset}$D3), (D3) kann man sich die Definitionsprämissen (1), (2) geradeso überlegen wie für ($^{\frown}$D1), (D1) in **2.32**; auch die Anmerkung zu (D2), ($^{\frown}$D2) in **2.311** läßt sich auf (D4), ($^{\supset}$D4) übertragen, nur kommt Px „unter" $\bigwedge_y$ und, bei $^{\supset}$, (mit Qy) hinter $\neg\neg$.

Im allgemeinen ist keines der für Ordinalzahlrepräsentanten neu definierten Prädikate (schemata) $\overset{R}{\underset{P}{\overset{\supset}{>}}} \overset{S}{\underset{Q}{}}$, $\overset{\supset}{>}$, $\overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{S}{\underset{Q}{}}$, $>$ stabil. $\overset{*}{\underset{*}{>}}$ und $>$ haben auch nichts mit einer Übertragung des konversen asymmetrischen

Prädikatteils ($: R^{<-}$ gemäß $R^{<}xy \leftrightharpoons Rxy \wedge \neg Ryx$, $S^{-}xy \leftrightharpoons Syx$) auf die Prädikatenprädikate $\overset{*}{\underset{*}{\leq}}{}^{*}_{*}$, $\leq$ zu tun. Effektive junktorenlogische Konsequenzen aus Satz 2 und 3 für Abkürzungen wie $PR < QS \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons PR \leq QS \wedge \neg QS \leq PR$ (und ebenso mit $^{\cap}$) werden hier als selbstverständlich behandelt; erst recht derartige Konsequenzen für Abkürzungen wie $PR \overset{\cap}{\equiv} QS \leftrightharpoons PR \overset{\cap}{\leq} QS \wedge QS \overset{\cap}{\leq} PR$ (und ebenso ohne $^{\cap}$), die dem symmetrischen Prädikatteil $R^{=}xy \leftrightharpoons Rxy \wedge Ryx$ nachgebildet sind.

Nicht nur, damit die erstgenannte Abkürzung nicht (D4) widerstreite, sondern auch mit Rücksicht auf die etwas verwickelten und bei Umstellung ungleichförmig erscheinenden Definientes in den übrigen Definitionen ($^{[\cap]}$D1), ($^{[\cap]}$D2), ($^{[\supset]}$D3), ($^{\supset}$D4) wollen wir jedwedes „Umklappen" von $\downarrow\downarrow \overset{\leftarrow}{\leq} \uparrow\uparrow$, $\downarrow \overset{\leftarrow}{\leq} \uparrow$, $\uparrow\uparrow \overset{\rightarrow}{>} \downarrow\downarrow$, $\uparrow \overset{\rightarrow}{>} \downarrow$ in $\uparrow\uparrow \overset{\rightarrow}{\geq} \downarrow\downarrow$, $\uparrow \overset{\rightarrow}{\geq} \downarrow$, $\downarrow\downarrow \overset{\leftarrow}{<} \uparrow\uparrow$, $\downarrow \overset{\leftarrow}{<} \uparrow$ unterlassen.

Satz 4.

(o 16) $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \ddot{\rightarrow} P \times Q\, x\, y \dot{\rightarrow} \neg\, x \overset{R}{\underset{P}{>}}{}^{\supset}_{Q}{}^{S}\, y \leftrightarrow x \overset{R}{\underset{P}{\leq}}{}^{\cap}_{Q}{}^{S}\, y$,

(o 17) $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \dot{\rightarrow} \neg\, PR \overset{\supset}{>} QS \leftrightarrow PR \overset{\cap}{\leq} QS$,

(o 18) $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \ddot{\rightarrow} P \times Q\, x\, y \dot{\rightarrow} x \overset{R}{\underset{P}{>}}{}^{S}_{Q}\, y \rightarrow x \overset{R}{\underset{P}{>}}{}^{\supset}_{Q}{}^{S}\, y$,

(o 19) $\vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \dot{\rightarrow} PR > QS \rightarrow PR \overset{\supset}{>} QS$.

Beweise. (o 16) resultiert durch $P \times Q$-bedingten Induktionsschritt bezüglich $R \times S$ für das $\dot{\rightarrow}$-Sukzedens, indem man zweimal $\neg \bigvee p\, D \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \bigwedge p \neg D$ (für verschieden bedingte p) anwendet, bevor die Induktionsannahme benutzt wird. (o 17) mit entsprechenden Schlüssen aus (o 16). (o 18), (o 19) folgt aus (D3), ($^{\supset}$D3) per Induktion und (D4), ($^{\supset}$D4).

Satz 5.

(o 20) $\vdash I(P_1, R_1) \wedge I(P_2, R_2) \wedge I(P_3, R_3) \ddot{\rightarrow}$

$\ddot{\rightarrow} P_1 \times P_2 \times P_3\, x_1\, x_2\, x_3 \dot{\rightarrow} x_1 \overset{R_1}{\underset{P_1}{>}}{}^{\supset}_{P_2}{}^{R_2}\, x_2 \wedge x_2 \overset{R_2}{\underset{P_2}{>}}{}^{\supset}_{P_3}{}^{R_3}\, x_3 \rightarrow x_1 \overset{R_1}{\underset{P_1}{>}}{}^{\supset}_{P_3}{}^{R_3} x_3$,

(o 21) $\vdash I(P_1, R_1) \wedge I(P_2, R_2) \wedge I(P_3, R_3) \dot{\rightarrow}$

$\dot{\rightarrow} P_1 R_1 \overset{\supset}{>} P_2 R_2 \wedge P_2 R_2 \overset{\supset}{>} P_3 R_3 \rightarrow P_1 R_1 \overset{\supset}{>} P_3 R_3$;

(o 24) $\vdash I(P_1, R_1) \wedge I(P_2, R_2) \wedge I(P_3, R_3) \ddot{\rightarrow}$

$\ddot{\rightarrow} P_1 \times P_2 \times P_3\, x_1\, x_2\, x_3 \dot{\rightarrow} x_1 \overset{R_1}{\underset{P_1}{\leq}}{}^{\cap}_{P_2}{}^{R_2}\, x_2 \wedge x_3 \overset{R_3}{\underset{P_3}{>}}{}^{\supset}_{P_2}{}^{R_2}\, x_2 \rightarrow x_3 \overset{R_3}{\underset{P_3}{>}}{}^{\supset}_{P_1}{}^{R_1}\, x_1$,

(o 25) $\vdash I(P_1, R_1) \wedge I(P_2, R_2) \wedge I(P_3, R_3) \dot{\rightarrow}$

$\dot{\rightarrow} P_1 R_1 \overset{\cap}{\leq} P_2 R_2 \wedge P_3 R_3 \overset{\supset}{>} P_2 R_2 \rightarrow P_3 R_3 \overset{\supset}{>} P_1 R_1$;

(o 26), (o 27), (o 28), (o 29) *wie* (o 20), (o 21), (o 24), (o 25), *bloß ohne* $^{\supset}$ *und* $^{\cap}$, (o 30), (o 31) *wie* (o 24), (o 25) *ohne* $^{\supset}$ *und* $^{\cap}$, *aber mit Indizes* $_{23,\ 21,\ (31)}$ *anstelle* $_{12,\ 32,\ (31)}$;

(o 32) $\vdash \mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{R}) \wedge \mathrm{I}(\mathrm{Q},\mathrm{S}) \overset{\cdot\cdot}{\rightarrow} \mathrm{P} \times \mathrm{Q}\, \mathrm{x}\, \mathrm{y} \overset{\cdot}{\rightarrow} \mathrm{x} \,{}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{P}} > {}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{Q}}\, \mathrm{y} \rightarrow \mathrm{y} \,{}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{Q}} \leq {}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{P}}\, \mathrm{x}$,

(o 33) $\vdash \mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{R}) \wedge \mathrm{I}(\mathrm{Q},\mathrm{S}) \overset{\cdot}{\rightarrow} \mathrm{P}\,\mathrm{R} > \mathrm{Q}\,\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{Q}\,\mathrm{S} \leq \mathrm{P}\,\mathrm{R}$.

Korollar.

(o 22) $\vdash \mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{R}) \wedge \mathrm{I}(\mathrm{Q},\mathrm{S}) \rightarrow \neg\neg(\mathrm{P}\,\mathrm{R} \overset{\cap}{\leq} \mathrm{Q}\,\mathrm{S} \vee \mathrm{Q}\,\mathrm{S} \overset{\cap}{\leq} \mathrm{P}\,\mathrm{R})$,

(o 23) $\vdash \mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{R}) \wedge \mathrm{I}(\mathrm{Q},\mathrm{S}) \overset{\cdot}{\rightarrow} \neg\, \mathrm{P}\,\mathrm{R} \overset{\cap}{\leq} \mathrm{Q}\,\mathrm{S} \leftrightarrow \mathrm{Q}\,\mathrm{S} \overset{\cap}{<} \mathrm{P}\,\mathrm{R}$;

(o 34) $\vdash \mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{R}) \wedge \mathrm{I}(\mathrm{Q},\mathrm{S}) \overset{\cdot}{\rightarrow} \mathrm{P}\,\mathrm{R} > \mathrm{Q}\,\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{Q}\,\mathrm{S} < \mathrm{P}\,\mathrm{R}$.

Beweise. (o 20), (o 21) und (o 24), (o 25) gehen, ähnlich wie beim Beweis zu (o 14), (o 15), auf Anwendungen von

$$\vdash \bigvee \mathrm{p}_1 \bigwedge \mathrm{p}_2 \neg\neg \mathrm{D}_{12}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \wedge \bigvee \mathrm{p}_2 \bigwedge \mathrm{p}_3 \neg\neg \mathrm{D}_{23}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \rightarrow$$
$$\rightarrow \bigvee \mathrm{p}_1 \bigvee \mathrm{p}_2 \bigwedge \mathrm{p}_3 \neg\neg(\mathrm{D}_{12}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \wedge \mathrm{D}_{23}(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)), \text{ falls } {}_{\not}\mathrm{p}_3 \mathrm{D}_{12},\ {}_{\not}\mathrm{p}_1 \mathrm{D}_{23},$$

bzw.

$$\vdash \bigwedge \mathrm{p}_1 \neg\neg \bigvee \mathrm{p}_2 \mathrm{D}_{12}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \wedge \bigvee \mathrm{p}_3 \bigwedge \mathrm{p}_2 \neg\neg \mathrm{D}'_{32}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_2) \rightarrow$$
$$\rightarrow \bigvee \mathrm{p}_3 \bigwedge \mathrm{p}_1 \neg\neg \bigvee \mathrm{p}_2 (\mathrm{D}_{12}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \wedge \mathrm{D}'_{32}(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_2)), \text{ falls } {}_{\not}\mathrm{p}_3 \mathrm{D}_{12},\ {}_{\not}\mathrm{p}_1 \mathrm{D}'_{32},$$

zurück. (o 26) bis (o 31) ergeben sich nach demselben Muster: die $\neg\neg$ darf man tilgen (ohne $\vdash$ zu verletzen), und danach stört beim zweiten $\vdash$ auch die Indexumordnung nicht mehr. (o 32): Induktionsschritt durch Alteration bedingter Quantoren ($: \vdash \bigvee \mathrm{p}_1 \bigwedge \mathrm{p}_2 \mathrm{D} \rightarrow \bigwedge \mathrm{p}_2 \bigvee \mathrm{p}_1 \mathrm{D}$) vor Rückgriff auf die Induktionsannahme. (o 33) analog, mit (o 32).

(o 22): $\neg\neg(\mathrm{P}\mathrm{R} \overset{\supset}{>} \mathrm{Q}\mathrm{S} \vee \mathrm{P}\mathrm{R} \overset{\cap}{\leq} \mathrm{Q}\mathrm{S})$ nach (o 17), $\vdash \neg\neg(\mathrm{D} \vee \neg \mathrm{D})$; $\overset{\supset}{>}$ irreflexiv nach (o 17) und (o 11) (mit (o 9)), also asymmetrisch wegen (o 21); daher $\mathrm{P}\mathrm{R} \overset{\supset}{>} \mathrm{Q}\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{Q}\mathrm{S} \overset{\cap}{\leq} \mathrm{P}\mathrm{R}$ nach (o 17). (o 23): $\leftarrow$ per definitionem; für $\rightarrow$ fehlt $\neg \mathrm{P}\mathrm{R} \overset{\cap}{\leq} \mathrm{Q}\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{Q}\mathrm{S} \overset{\cap}{\leq} \mathrm{P}\mathrm{R}$, was aus $\vdash \neg\neg(\mathrm{D}_1 \vee \mathrm{D}_2) \leftrightarrow \leftrightarrow (\neg \mathrm{D}_1 \rightarrow \neg\neg \mathrm{D}_2)$ mit (o 22), (o 7) folgt. (o 34): (o 33) liefert $\mathrm{Q}\mathrm{S} \leq \mathrm{P}\mathrm{R}$; mit $\overset{\supset}{>}$ ist auch $>$ irreflexiv infolge (o 19), so daß $\neg \mathrm{P}\mathrm{R} \leq \mathrm{Q}\mathrm{S}$ über (o 29) oder (o 31).

(Während $\overset{\cap}{\leq}$ und $\overset{\supset}{>}$ antitransitiv sind, sind allgemein weder $\leq$ noch $>$ antitransitiv — womit die Eigenschaft 'non-$*$ ist transitiv' gemeint sei.)

2.36 Zur Vorbereitung der schwachen Induktion bezüglich $\overset{\cap}{<}$ (unter **2.37**) bauen wir in gewisser Hinsicht (o 32), (o 33) nach verschiedenen Richtungen aus. Interessant ist, daß die (unter **2.38** angehängte) „Abschnitts"darstellung von QS, die $\overset{\cap}{<}$ PR, auf der in der naiven Mengenlehre die Normaldarstellung jeder Ordinalzahl α durch $W_\alpha = \in_\beta \beta < \alpha$ fußt, welche ihrerseits ja die Trichotomie $< - = - >$ trägt, hier erst dann benötigt wird, wenn auch Rekursionen hinsichtlich $\overset{\cap}{<}$, etwa [20] 1.3.13, in $\mathfrak{S}_1$ übersetzt werden sollen.

Satz 6.

(o 35) $\vdash I(P,R) \wedge I(Q,S) \ddot{\rightarrow} P \times Q\, x\, y \dot{\rightarrow} x \overset{R}{\underset{P}{>}}{}^{\supset}_{\underset{Q}{S}}\, y \leftrightarrow \bigvee_{\underset{P}{z}} R\, z\, x \wedge y \overset{S}{\underset{Q}{\leq}}{}^{\cap}_{\underset{P}{R}}\, z$,

(o 37) $\vdash I(P,R) \ddot{\rightarrow} P \times P\, x\, y \dot{\rightarrow} R\, x y \rightarrow y \overset{R}{\underset{P}{>}}\, \underset{P}{R}\, x$;

(o 38) $\vdash I(P,R) \dot{\rightarrow} {}_R P_z\, x \rightarrow x \overset{R}{\underset{P}{\leq}}\, \underset{{}_RP_z}{R}\, x \wedge x \underset{{}_RP_z}{R} \leq \underset{P}{R}\, x$,

(o 39) $\vdash I(P,R) \dot{\rightarrow} {}_R P_z\, x \rightarrow z \overset{R}{\underset{P}{>}}\, \underset{P}{R}\, x$,

(o 40) $\vdash I(P,R) \dot{\rightarrow} P z \rightarrow P R > {}_R P_z R$,

(o 41) $\vdash I(P,R) \wedge I(Q,S) \dot{\rightarrow} P R \overset{\supset}{>} Q S \leftrightarrow \bigvee_{\underset{P}{z}} Q S \overset{\cap}{\leq} {}_R P_z R$,

(o 43) $\vdash I(P,R) \ddot{\rightarrow} {}_R P_z\, y \dot{\rightarrow} {}_{RR} P_{zy}\, x \leftrightarrow {}_R P_y\, x$,

wo ${}_R P_z\, x \leftrightharpoons P z \wedge \overset{*}{R}_P\, x z$ *sei (vgl. Satz* 1*)*;

(o 36), (o 42) *wie* (o 35), (o 41), *bloß ohne* $^{\supset}$ *und* $^{\cap}$.

Beweise. (o 35) ergibt sich durch $P \times Q$-bedingten Induktionsschritt bezüglich $R \times S$ für das $\dot{\rightarrow}$-Sukzedens:

$$\begin{aligned} x_0 \overset{R}{\underset{P}{>}}{}^{\supset}_{\underset{Q}{S}}\, y_0 &\leftrightarrow \bigvee_{Rxx_0} x_P \bigwedge_{Syy_0} y_Q \neg\neg\, x \overset{R}{\underset{P}{>}}{}^{\supset}_{\underset{Q}{S}}\, y \quad (: ({}^{\supset}D3)) \\ &\leftrightarrow \bigvee_{Rxx_0} x_P \bigwedge_{Syy_0} y_Q \neg\neg \bigvee_{Rzx} z_P\; y \overset{S}{\underset{Q}{\leq}}{}^{\cap}_{\underset{P}{R}}\, z \quad (: \text{per Annahme}) \\ &\leftrightarrow \bigvee_{Rxx_0} x_P\, y_0 \overset{S}{\underset{Q}{\leq}}{}^{\cap}_{\underset{P}{R}}\, x \quad (: ({}^{\cap}D1)); \end{aligned}$$

x ist ein z_0, wie (o 35) es behauptet. (o 36) entsprechend, ohne $^{\supset}$, $^{\cap}$ und $\neg\neg$. (o 37) ergibt sich durch $P \times P$-bedingten Induktionsschritt bezüglich $R \times R$ für das $\dot{\rightarrow}$-Sukzedens:

$$\begin{aligned} R\, x_0\, y_0 &\rightarrow \bigwedge_{Rxx_0} x_P\; x_0 \overset{R}{\underset{P}{>}}\, \underset{P}{R}\, x \quad (: \text{per Annahme}), \\ &\rightarrow \bigvee_{Ryy_0} y_P \bigwedge_{Rxx_0} x_P\; y \overset{R}{\underset{P}{>}}\, \underset{P}{R}\, x \quad (: x_0 \text{ ist solch ein } y) \\ &\leftrightarrow y_0 \overset{R}{\underset{P}{>}}\, \underset{P}{R}\, x_0 \quad (: (D3)). \end{aligned}$$

(o 38) ergibt sich durch $P \times {}_R P_z$-bedingten Induktionsschritt bezüglich $R \times R$ für $x \overset{R}{\underset{P}{\leq}}\, \underset{{}_RP_z}{R}\, x$ und ${}_R P_z \times P$-bedingten Induktionsschritt bezüglich $R \times R$ für $x \underset{{}_RP_z}{R} \leq \underset{P}{R}\, x$, indem $P x_0 \wedge {}_R P_z\, x_0 \leftrightarrow {}_R P_z\, x_0 \dot{\rightarrow} \dot{\rightarrow} P x \wedge R x x_0 \leftrightarrow {}_R P_z\, x \wedge \overset{z_0}{R}_P\, x x_0$, da ${}_R P_z\, x_0 \leftrightarrow P z \wedge \overset{*}{R}_P\, x_0 z (\rightarrow P x_0)$ und $\overset{z_0}{R}_P\, x z \leftrightarrow P x \wedge \bigvee_{\underset{P}{x_0}} R x x_0 \wedge \overset{z_0}{R}_P\, x_0 z$ — auch, umarrangiert, als Definiens-adjugand (in Satz 1) verwendbar —, und da die Umkehrung hinter dem letzten $\dot{\rightarrow}$ für sich trivial.

(o 39) ergibt sich durch (unbedingte) gewöhnliche Induktion für $\bigwedge_{xz} P z \wedge \overset{y}{R}_P\, x z \rightarrow z \overset{R}{\underset{P}{>}}\, \underset{P}{R}\, x$ nach y: im Fall $y = 0$ gilt $P z \wedge \overset{0}{R}_P\, x z \rightarrow$

$\to Pz \wedge Px \wedge Rxz$, also $z \overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{R}{\underset{P}{}} x$ laut (o 37); im Fall $y = y_0$ gilt $Pz \wedge \overset{y_0}{R}_P xz \to Pz \wedge \bigvee_{\substack{z_0 \\ P}} \overset{y_0}{R}_P xz_0 \wedge Rz_0 z$ $(\to Px)$, woraus annahmegemäß und laut (o 37) folgt $z_0 \overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{R}{\underset{P}{}} x \wedge z \overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{R}{\underset{P}{}} z_0$, also, laut (o 26), $z \overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{R}{\underset{P}{}} x$, womit der gewöhnliche Induktionsschritt geleistet ist. Dann aber gilt sofort $Pz \wedge \bigvee y_{>0} \overset{y}{R}_P xz \to z \overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{R}{\underset{P}{}} x$.

Ohne Induktion folgt jetzt (o 40), (o 41):

$$Pz \to \bigwedge_x z \overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{R}{\underset{P}{}} x \quad (:(\text{o } 39)) \leftrightarrow \bigwedge_x z \overset{R}{\underset{{}_RP_z}{>}} \overset{R}{\underset{{}_RP_z}{}} x \quad (:(\text{o } 38), (\text{o } 28)),$$

$$\to \bigvee_{\substack{x \\ P}} \bigwedge_{\substack{y \\ {}_RP_z}} x \overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{R}{\underset{{}_RP_z}{}} y \quad (:\text{nimm } z \text{ als } x) \leftrightarrow PR > {}_RP_z R \quad (:(\text{D } 4));$$

$$PR \overset{\supset}{\underset{Q}{>}} QS \leftrightarrow \bigvee x_P \bigwedge y_Q \neg\neg x \overset{R}{\underset{P}{>}} \overset{S}{\underset{Q}{}} y \quad (:(^{\supset}\text{D } 4))$$

$$\leftrightarrow \bigvee x_P \bigwedge y_Q \neg\neg \bigvee z_P (Rzx \wedge y \overset{S}{\underset{Q}{}} \overset{\cap}{\leq} \overset{R}{\underset{P}{}} z) \quad (:(\text{o } 35))$$

$$\leftrightarrow \bigvee z_P \bigwedge y_Q \neg\neg \bigvee x_P (Rxz \wedge y \overset{S}{\underset{Q}{}} \overset{\cap}{\leq} \overset{R}{\underset{{}_RP_z}{}} x) \quad (:\text{Umbenennung},$$

$$Pz \wedge Px \wedge Rxz \to {}_RP_z x, (\text{o } 38), (\text{o } 8), (\text{o } 14))$$

$$\leftrightarrow \bigvee z_P QS \overset{\cap}{\leq} {}_RP_z R \quad (:\to (^{\cap}\text{D } 2), \leftarrow (\text{o } 40), (\text{o } 19), (\text{o } 25)).$$

(o 42) entsprechend, ohne $^{\supset}$, $^{\cap}$ und $\neg\neg$, mit (o 36) statt (o 35), ohne (o 8) und (o 19), mit (o 12), (o 29) statt (o 14), (o 25).

Nun noch (o 43): in der Tat, ${}_{RR}P_{zy}\, x \leftrightharpoons {}_RP_z\, y \wedge \overset{*}{R}_{{}_RP_z}\, xy$; ferner ${}_RP_z\, y \dot{\to} \overset{*}{R}_{{}_RP_z}\, xy \leftrightarrow \overset{*}{R}_P xy$, indem ${}_RP_z \subseteq P$ und $R_{{}_RP_z}\, xy \to R_P xy$ ad $\to$ (ohne $\dot{\to}$-Antezedens), und $Pz \wedge \overset{*}{R}_P yz \dot{\to} \bigwedge_x \overset{*}{R}_P xy \to Pz \wedge \overset{*}{R}_P xz$ sowie ${}_RP_z\, y \dot{\to} \overset{z_0}{R}_P xy \to \overset{z_0}{R}_{{}_RP_z} xy$ ad $\leftarrow$. Also gilt ${}_RP_z y \dot{\to} {}_{RR}P_{zy}\, x \leftrightarrow \overset{*}{R}_{{}_RP_z}\, xy \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \overset{*}{R}_P xy \leftrightarrow \overset{*}{R}_P xy \wedge Py$, da $\overset{*}{R}_P yz \to Py$.

2.37 Gestützt auf die Vorarbeit in den Sätzen 2—6 erreicht man den folgenden, diese konstruktiven Schlußketten vorläufig abschließenden

Satz 7. *(Unbeschränkte schwache transfinite Induktion.) Es gilt*

$$\vdash \bigwedge_{\alpha_0} \bigwedge_{\alpha_1} \alpha_1 < \alpha_0 \to \neg\neg \underset{+}{\pi}\, \alpha_1 \,.\to \neg\neg \underset{+}{\pi}\, \alpha_0 \,.\to \neg\neg \underset{+}{\pi}\, \alpha,$$

repräsentiert in der Form

$$(\text{o } 44) \quad \vdash \bigwedge_{\substack{\pi_0 \rho_0 \\ I(\pi_0, \rho_0)}} \bigwedge_{\substack{\pi_1 \rho_1 \\ I(\pi_1, \rho_1)}} \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{<} \pi_0 \rho_0 \to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1) \,.\to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_0 \rho_0) \,.\dot{\to}$$

$$\dot{\to} I(\pi, \rho) \to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi \rho),$$

wo ${}^1\underset{+}{\Pi}_l(\pi \rho)$ *für* $I(\pi, \rho) \vee \wedge \to {}^0\Pi_m {}^0\Pi_l$ *(mit* $l \neq m$*) steht. Erst recht gilt* — (o 3) *mittels* (o 17), (o 23) *und mittels* (o 19) *auf das Aussageschema* $\underset{+}{I}(I, \overset{\cap}{<})$ *von* (o 44) *in übertragener, aber in* $\mathfrak{S}_1$ *durchaus ableitbarer Form angewendet* — (o 44) *bezüglich* $\overset{\supset}{>}^-$ *und bezüglich* $>^-$ *anstelle* $\overset{\cap}{<}$.

Beweis. Das $\dot{\to}$-Sukzedens in (o 44) wird durch Vermittlung von $I(\pi, \rho; \hat{\pi}, x)$, wo $\hat{\pi} t \leftrightharpoons \bigwedge_{\substack{\pi_1 \rho_1 \\ I(\pi_1, \rho_1)}} \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_\rho\pi_t \rho \to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1)$, dargetan.

Dazu genügt es, aus der Induktionsvoraussetzung in (o 44), dem dortigen $\dot{\to}$-Antezedens, und aus $I(\pi, \rho)$ die Induktionsvoraussetzung in $I(\pi, \rho; \hat{\pi}, x)$ zu folgern: danach wird das $\dot{\to}$-Antezedens in (o 44) nämlich $I(\pi, \rho) \dot{\to} \pi x \to \hat{\pi} x$ implizieren, also auch die Induktionsannahme $I(\pi, \rho) \to \bigwedge_{\substack{\pi_1 \rho_1 \\ I(\pi_1, \rho_1)}} \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{<} \pi \rho \to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1)$ in (o 44); denn aus $I(\pi, \rho) \wedge I(\pi_1, \rho_1) \wedge \neg \pi \rho \overset{\cap}{\leq} \pi_1 \rho_1$ folgt nach (o 17), (o 41) $\neg\neg \bigvee_{\pi} x\, \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_\rho\pi_x \rho$, aus

$$I(\pi, \rho) \wedge \pi x \wedge I(\pi_1, \rho_1) \wedge \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_\rho\pi_x \rho \to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1)$$

(: infolge $I(\pi, \rho) \dot{\to} \pi x \to \hat{\pi} x$) aber

$$I(\pi, \rho) \wedge I(\pi_1, \rho_1) \dot{\to} [\neg\neg] \bigvee_{\pi} x\, \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_\rho\pi_x \rho \,\bullet\!\to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1)\,.^{17}$$

Geht man noch mit jener implizierten Annahme in das $\dot{\to}$-Antezedens von (o 44), so ergibt sich das $\dot{\to}$-Sukzedens $I(\pi, \rho) \dot{\to} \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi \rho)$, und (o 44) wäre bewiesen.

Nun folgt aus $I(\pi, \rho)$ und per Annahme in $I(\pi, \rho; \hat{\pi}, x)$ allein schon $\bigwedge_{\substack{\pi_1 \rho_1 \\ I(\pi_1, \rho_1)}} \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{<} {}_\rho\pi_{x_0} \rho \to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1)$. Denn aus $\neg\, {}_\rho\pi_{x_0} \rho \overset{\cap}{\leq} \pi_1 \rho_1$ folgt dabei nach (o 17), (o 41) zunächst $\neg\neg \bigvee_{\substack{z \\ \rho \pi_{x_0}}} \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_{\rho\rho}\pi_{x_0 z} \rho$, also $\neg\neg \bigvee_{\substack{z \\ \rho \pi_{x_0}}} \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_\rho\pi_z \rho$ laut (o 43). Sodann ergibt sich

$$I(\pi, \rho) \wedge I(\pi_1, \rho_1) \dot{\to} [\neg\neg] \bigvee_z {}_\rho\pi_{x_0} z \wedge \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_\rho\pi_z \rho \,\bullet\!\to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1)\,,$$

weil ${}_\rho\pi_{x_0} z$ einerseits $\pi x_0 \wedge \overset{*}{\rho}_\pi z x_0$, mithin $\pi x_0 \wedge \bigvee_{\pi} x\, \rho x x_0 \wedge \overset{*}{\rho}_\pi z x \vee z = x$, also, annahmegemäß, $\hat{\pi} x$ für solch ein x nach sich zieht, andererseits ${}_\rho\pi_z \rho \leq {}_\rho\pi_x \rho$ (im Fall $z = x$ aus (o 10), im Fall $\overset{*}{\rho}_\pi z x$ aus ${}_\rho\pi_x z$, nämlich über ${}_\rho\pi_z \rho < {}_\rho\pi_x \rho$ (dank (o 40), (o 43)) mit (o 33)) — wonach, wegen $\pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_\rho\pi_z \rho$, mit (o 9), (o 15) das $\to$-Antezedens in $\hat{\pi} x$ und somit $\neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1)$ deduziert ist.

Daraufhin fehlt am Induktionsschritt zu $\hat{\pi} x_0$ in $I(\pi, \rho; \hat{\pi}, x)$ bloß noch $\bigwedge_{\substack{\pi_1 \rho_1 \\ I(\pi_1, \rho_1)}} \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{=} {}_\rho\pi_{x_0} \rho \to \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1 \rho_1)$, wenn man berücksichtigt, daß mittels $\vdash \neg\neg D_{12} \leftrightarrow \neg\neg ((D_{12} \wedge D_{21}) \vee (D_{12} \wedge \neg D_{21}))$ und (o 7) folgt $\pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{\leq} {}_\rho\pi_{x_0} \rho \leftrightarrow \neg\neg (\pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{=} {}_\rho\pi_{x_0} \rho \vee \pi_1 \rho_1 \overset{\cap}{<} {}_\rho\pi_{x_0} \rho)$, und daß doppelte Negation vor dem $\to$-Antezedens von $\hat{\pi} x_0$ tilgbar ist. Die fehlende Behauptung ergibt sich nunmehr aus der Induktionsvoraussetzung in

---

[17] Formelteile in eckigen Klammern dürfen nachträglich getilgt werden.

(o 44): für jedes $\pi_0\rho_0$ mit $I(\pi_0, \rho_0)$ und $\pi_0\rho_0 \overset{\cap}{\equiv} {}_\rho\pi_{x_0}\rho$ gilt aufgrund des vorigen Absatzes $\bigwedge_{\substack{\pi_1\rho_1 \\ I(\pi_1,\rho_1)}} \pi_1\rho_1 \overset{\cap}{<} \pi_0\rho_0 \rightarrow \neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_1\rho_1)$, denn der transitive Schluß von $\overset{\cap}{<}$ und $\overset{\cap}{\leq}$ auf $\overset{\cap}{<}$ ist ja (via (o 15)) selbstverständlich gültig; die so bewiesene Induktionsannahme in (o 44) liefert $\neg\neg \underset{+}{\pi}(\pi_0\rho_0)$, folglich sind, diesen Schluß über $\pi_0\rho_0$ generalisierend, Induktionsschritt und -voraussetzung in $I(\pi, \rho; \hat{\pi}, x)$ erzielt — und laut vorvorigem Absatz auch (o 44) selbst.

2.38 Als Anfang einer weiteren (hier nicht mehr abgehandelten) konstruktiven Schlußkette, die im Satz über unbeschränkte transfinite Rekursion bei Definiensaufbau mit beschränkten Operatoren über Ordinalzahlen gipfelt, bringe ich noch den folgenden, eine schwache Verschärfung von (o 41) bietenden

Satz 8.

(o 45) $\quad \vdash I(P, R) \dot{\rightarrow} Px \rightarrow x \underset{P}{\overset{R}{\leq}} \underset{P}{\overset{\overset{*}{R}_P}{\leq}} x \wedge x \underset{P}{\overset{\overset{*}{R}_P}{\leq}} \underset{P}{\overset{R}{\leq}} x,$

(o 46) $\quad \vdash I(P, R) \rightarrow PR \equiv P\overset{*}{R}_P,$

(o 47) $\quad \vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \dot{\rightarrow} \neg PR \overset{\cap}{\leq} QS \leftrightarrow \neg\neg \underset{P}{\bigvee}{}_z QS \overset{\cap}{\equiv} {}_RP_z R.$

Beweise. (o 45) durch $P \times P$-bedingte Induktionsschritte bezüglich $R \times \overset{*}{R}_P$ bzw. $\overset{*}{R}_P \times R$, denn einerseits $Px \dot{\rightarrow} Rxx_0 \rightarrow \overset{*}{R}_P xx_0$ und andererseits $\overset{*}{R}_P xx_0 \rightarrow \underset{P}{\bigvee}{}_y Ryx_0 \dot{\wedge} \overset{*}{R}_P xy \vee x = y$, worauf $Py \wedge \overset{*}{R}_P xy \rightarrow \rightarrow y \underset{P}{\overset{R}{>}} \underset{P}{\overset{R}{\geq}} x$ (: (o 39)) mit (o 32), (o 26) die zweite Induktionsbehauptung liefert. (o 46) aus (o 45).

(o 47) durch P-bedingten Induktionsschritt bezüglich $\overset{*}{R}_P$ für $\bigwedge z_P \neg QS \overset{\cap}{\equiv} {}_RP_z R \dot{\rightarrow} Px \rightarrow \neg\neg \bigvee y_Q\, x \underset{P}{\overset{R}{\leq}} \underset{Q}{\overset{S}{\leq}} y$ nach x; dieser wird dann sofort zu $PR \overset{\cap}{\leq} QS$ führen, und mit Kontraposition zu (o 47)-$\rightarrow$, während (o 47)-$\leftarrow$ aus (o 41), (o 17) folgt. Annahmegemäß gelte das $\dot{\rightarrow}$-Sukzedens für x mit $Px \wedge \overset{*}{R}_P xx_0 \wedge Px_0 \leftrightarrow {}_RP_{x_0} x$; also, falls $\dot{\rightarrow}$-Antezedens, $\bigwedge_x \neg\neg \bigvee_y x \underset{{}_RP_{x_0}}{\overset{R}{\leq}} \underset{Q}{\overset{S}{\leq}} y$ (: (o 38), (o 8), (o 14)) $\leftrightarrow {}_RP_{x_0} R \overset{\cap}{\leq} QS$ (: ($^\cap$D 2)), und daher $\neg QS \overset{\cap}{\leq} {}_RP_{x_0} R$ (: $\neg QS \overset{\cap}{\equiv} {}_RP_z R \leftarrow Pz$). Dies besagt

$$\neg \underset{Q}{\bigwedge}{}_y \neg\neg \underset{{}_RP_{x_0}}{\bigvee}{}_x\, y \underset{Q}{\overset{S}{\leq}} \underset{{}_RP_{x_0}}{\overset{R}{\leq}} x \,.. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \neg\neg \underset{Q}{\bigvee}{}_{y_0} \underset{{}_RP_{x_0}}{\bigwedge}{}_x \neg\neg y_0 \underset{Q}{\overset{S}{>}} \underset{{}_RP_{x_0}}{\overset{R}{\geq}} x \quad (: (o\ 16))$$

$$\leftrightarrow \neg\neg \underset{Q}{\bigvee}{}_{y_0} \underset{{}_RP_{x_0}}{\bigwedge}{}_x \neg\neg \underset{Q}{\bigvee}{}_y Syy_0 \wedge x \underset{{}_RP_{x_0}}{\overset{R}{\leq}} \underset{Q}{\overset{S}{\leq}} y \quad (: (o\ 35))$$

$$\leftrightarrow \neg\neg \bigvee_{\substack{y_0 \\ Q}} x_0 \overset{*}{\underset{P}{R_P}} \overset{\cap}{\leq}{}^{S}_{Q}\, y_0 \quad (: P x_0 \dot{\rightarrow}_R P_{x_0} x \leftrightarrow P x \wedge \overset{*}{R}_P x x_0,$$

$$(o\,38), (o\,8), (o\,14) \text{ und } (o\,45), (o\,8), (o\,14))$$

$$\leftrightarrow \neg\neg \bigvee_{\substack{y_0 \\ Q}} x_0 \overset{R}{\underset{P}{\cap}} \leq {}^{S}_{Q} y_0 \quad (: (o\,45), (o\,8), (o\,14)),$$

womit die Induktionsbehauptung erzielt ist.

2.39 Ohne Beweis seien noch diejenigen Daten zusammengestellt, welche sich auf die Nachfolgerbildung und die Limes- (bzw. Supremum-)-bildung beziehen, auf jene Operationen also, die naiv zur Erzeugung der zweiten Zahlklasse dienen, falls die Limesbildung auf Ordinalzahlfolgen vom Wohlordnungstyp ω_0 eingeschränkt wird, deren Glieder bereits erzeugt sind.

Satz 9. Vom 2-stelligen Prädikat F sei vorausgesetzt, daß

$$\vdash F x y \vee \neg F x y \quad \text{und} \quad \vdash \bigvee_{\substack{y \\ Fxy}} \bigwedge_{\substack{z \\ Fxz}} y = z, \quad \vdash F x_1 y \wedge F x_2 y \rightarrow x_1 = x_2.$$

Mit ${}^F P y \leftrightharpoons \bigvee_x P x \wedge F x y$ und ${}^F R y_1 y_2 \leftrightharpoons \bigvee_{x_1 x_2} R x_1 x_2 \wedge F x_1 y_1 \wedge F x_2 y_2$ gilt dann

(o 48) $\quad \vdash I(P, R) \leftrightarrow I({}^F P, {}^F R),$

(o 49) $\quad \vdash I(P, R) \dot{\rightarrow} F x y \rightarrow x \overset{R}{\underset{P}{\leq}} \overset{{}^F R}{{}^F P} y \wedge y \overset{{}^F R}{{}^F P} \leq \overset{R}{\underset{P}{\leq}} x,$

(o 50) $\quad \vdash I(P, R) \rightarrow PR \equiv {}^F P\, {}^F R.$

Es sei

$$^{+}P x \leftrightharpoons \bigvee_{x_0} x = {}'x_0 \wedge P x_0 \dot{\vee} x = 0$$

und

$$^{+}R(P)\, x y \leftrightharpoons \bigvee_{x_0 y_0} x = {}'x_0 \wedge y = {}'y_0 \wedge R x_0 y_0 \dot{\vee}$$
$$\dot{\vee} \bigvee_x x = {}'x_0 \wedge P x_0 \wedge y = 0;$$

dann gilt

(o 51) $\quad \vdash I(P, R) \rightarrow I({}^{+}P, {}^{+}R(P)),$

(o 52) $\quad \vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \dot{\rightarrow} PR \leq QS \rightarrow {}^{+}P\, {}^{+}R(P) \leq {}^{+}Q\, {}^{+}S(Q),$

(o 54) $\quad \vdash I(P, R) \rightarrow {}^{+}P\, {}^{+}R(P) > PR,$

(o 55) $\quad \vdash I(P, R) \wedge I(Q, S) \dot{\rightarrow} QS > PR \rightarrow {}^{+}P\, {}^{+}R(P) \leq QS.$

Mit $\underline{R} x \leftrightharpoons \bigvee_y R x y \vee R y x$ sei von den Prädikatformen $P(z)$, $R(z)$ vorausgesetzt, daß $\vdash z_1 = z_2 \leftarrow \bigvee_x P(z_1) x \wedge P(z_2) x \dot{\vee} \underline{R(z_1)} x \wedge \underline{R(z_2)} x$; $Q(z)$, $S(z)$ seien ebenso disjunkt vorausgesetzt. Für ${}^{\vee}P x \leftrightharpoons \bigvee z\, P(z)\, x$ und ${}^{\vee}R x y \leftrightharpoons \bigvee z\, R(z)\, x y$ gilt dann

(o 57) $\quad \vdash \bigwedge z\, I(P(z), R(z)) \rightarrow I({}^{\vee}P, {}^{\vee}R),$

(o 58) $\vdash \bigwedge z\,(I(P(z), R(z)) \wedge I(Q(z), S(z))) \dot{\rightarrow}$
$\dot{\rightarrow} \bigwedge z_1 \bigvee z_2\, P(z_1)\, R(z_1) \leq Q(z_2)\, S(z_2) \rightarrow {}^{\vee}P\, {}^{\vee}R \leq {}^{\vee}Q\, {}^{\vee}S$,

(o 60) $\vdash \bigwedge z\, I(P(z), R(z)) \rightarrow P(z)\, R(z) \leq {}^{\vee}P\, {}^{\vee}R$,

(o 61) $\vdash \bigwedge z\, I(P(z), R(z)) \wedge I(Q, S) \dot{\rightarrow} \bigwedge z\, P(z)\, R(z) \leq QS \rightarrow {}^{\vee}P\, {}^{\vee}R \leq QS$.

(o 53), (o 56) und (o 59), (o 62) wie (o 52), (o 55) und (o 58), (o 61), bloß mit $\overset{\cap}{\leq}$, $\overset{\supset}{>}$ anstelle $\leq$, $>$.

Damit sind $^{+}$ und $^{\vee}$ als mit $\equiv$ wie mit $\overset{\cap}{=}$ verträgliche Operationen nachgewiesen, die den kennzeichnenden Nachfolger- bzw. Supremum-Eigenschaften $\alpha < \alpha^{+}$, $\alpha < \beta \rightarrow \alpha^{+} \leq \beta$ und $\alpha(z) \leq \sup_z \alpha(z)$, $\bigwedge z\, \alpha(z) \leq \beta \rightarrow \sup_z \alpha(z) \leq \beta$ entsprechen.

2.4 Es kann sein, daß jede in $\mathfrak{S}_1$ erreichte Ordinalzahl majorisierbar ist durch eine in $\mathfrak{S}_1$ erreichte Ordinalzahl mit einem uneingeengten, primitiv rekursiv dargestellten Repräsentanten $\bigvee R$. Der Limes der in $\mathfrak{S}_1$ erreichbaren primitiv rekursiv dargestellten Ordinalzahlen ist ohne weiteres nämlich erst in der reflektorischen Ergänzung $\mathfrak{S}_1^1$ aus **0.52** deduktiv zu erreichen: man gehe, analog [16] S. 105—108, von einer eingeschachtelten zweifachen Rekursion aus, die eine Aufzählung $R(n)$ der 2-stelligen primitiv rekursiven Prädikate leistet; anschließend übertrage man die $R(n)$ „isomorph" (: (o 50)) auf disjunkte ${}^{F}R(n)$, wobei also

$$\vdash z_1 = z_2 \leftarrow \bigvee x\,(\underline{{}^{F}R(z_1)}\, x \wedge \underline{{}^{F}R(z_2)}\, x);$$

anhand $Tz \leftrightharpoons \bigvee z_0\,(d\,d_{\mathfrak{S}_1^0}(z_0, cf_0\, I(\bigvee, {}^{F}R({}^{(z)}0))))$ stellt dann QS mit $Qx \leftrightharpoons \bigvee z_T\, \underline{{}^{F}R(z)}\, x$ und $Sxy \leftrightharpoons \bigvee z_T\, {}^{F}R(z)\, x\, y$ den gewünschten Limes dar, der in $\mathfrak{S}_1^1$, wo per Reflexion $Tz \rightarrow I(\bigvee, {}^{F}R(z))$ folgt, erreicht wird (: (o 57) für z_T statt z).

Die unter **2.3**$*$ vorexerzierte konstruktive Ordinalzahltheorie würde von solchen primitiv rekursiven Majoranten $\bigvee R$ nicht wesentlich vereinfacht. Bei Einengungen PR ist ja weiterhin mit P zu rechnen, die in $\mathfrak{S}_1$ weder entscheidbar noch stabil sind; auch für primitiv rekursive $\bigvee R$ kann man im allgemeinen weder auf (${}^{\cap}D1, 2$) noch auf (${}^{\supset}D3, 4$) verzichten. Und wer durchweg das tertium-non-datur benutzen will, verwischt dabei den konstruktiven Wahrheitsgehalt von $\vdash I(\bigvee, R)$, der als Definitionsprämisse für einen Niveauvergleich ${}^{R}_{\bigvee} \overset{\cap\supset}{\leq} {}^{S}_{\bigvee}$ unentbehrlich ist.

3. Anhang: Zur transfiniten und exorbitanten Vollständigkeit der Sphäre $\mathfrak{S}_1$

Um eine ungefähre Abschätzung des Vollständigkeitsgrads von $\mathfrak{S}_1$ in knapper Form anzugeben, rückt der Text bis zum Schluß weiter von der Präzisionsstufe ab, die **2.** gegenüber **1.** aufrechterhalten hat. Ohne Kenntnis der Zielsetzung unter **3.2**$*$ bliebe übrigens der bisherige kalkulatorische Aufwand unmotiviert.

3.1 Was $\mathfrak{S}_1$ mit alleiniger Hilfe von Übersetzungen — also mit eindeutigen Umdeutungen (ohne „echte" vieldeutige) — mindestens auszudrücken vermag, fassen wir zusammen im

Hauptsatz 1. (Transfinite Vollständigkeit.)

Es läßt sich ein finites Übersetzungsverfahren aufweisen, das jede Deduktion in der formalisierten klassischen Ordinalzahltheorie ohne Ersetzungs- und Kardinalzahl-Axiomschema (: z.B. [20], Axiomgruppen 1.1.—3. und Axiomschema 2.1.) auf eine Deduktion in $\mathfrak{S}_1$ abbildet. Die Übersetzung verknüpft total verschiedene Objekte —etwa 0 mit $\wedge\wedge$, ω mit $\vee <$ etc.—, aber die Aussagen ($\wedge$), ($\vee$) mit sich selbst.

Beweisskizze. „Primitive" (: vgl. **1.62**) Aussageformen $\underset{+}{A}$ über Ordinalzahlen werden halbstabilisiert in $\mathfrak{S}_1$ übersetzt, indem man zuerst ein[17] ($\vee_\alpha$-freies) $^{[\bullet]\circ}\underset{+}{A}$ bildet und dann ähnlich wie bei Elimination einer bestimmten Variablensorte vorgeht, nur daß transfinite Variablen α durch zwei (1- und 2-stellige) Marken $\pi\rho$ mit der Bedingung $I(\pi, \rho)$ vertreten werden und auch das transfinite Primprädikat $\leq$ durch $\overset{\cap}{\leq}$ zu ersetzen ist. Ist $\underset{+}{A}$ ein primitives Aussageschema, so wird darin $\underset{+}{\pi}\alpha_1 ..$ mit $\underset{+}{\pi}(\pi_1\rho_1, ..)$, d.h. mit passenden $I(\pi_1, \rho_1) \wedge .. \overset{\wedge}{\underset{\vee}{\rightarrow}}{}_{0\Pi_m}{}^{0}\Pi_l$ (wo $l \neq m$) übersetzt, für die im Übersetzungsantezedens noch Verträglichkeitsbedingungen bezüglich $\overset{\cap}{\equiv}$ hinzutreten:

$$\pi_1\rho_1 \overset{\cap}{\equiv} \dot{\pi}_1\dot{\rho}_1 \dot{\rightarrow} \underset{+}{\pi}(\pi_1\rho_1, ..) \rightarrow \underset{+}{\pi}(\dot{\pi}_1\dot{\rho}_1, ..).$$

(Beim Induktions-Aussageschema in (o 44) war diese Verträglichkeitsbedingung für $\underset{+}{\pi}$ entbehrlich, da $\underset{+}{\pi}\alpha$ dort deduzierbar bisubjunktiv einheitlich „verläuft".) Die Ergänzung der Übersetzung bei nicht primitiven $\underset{+}{A}$, die mit Hilfe der in **2.38** erwähnten unbeschränkt transfinit rekursiv (aber mit beschränkt aufgebautem Definiens) definierten Prädikate $\underset{+}{P}$ zusammengesetzt sind, ergibt sich auf dem Weg zu dem dort vorgemerkten Rekursionssatz in Gestalt einer Übersetzung von verallgemeinerten Kennzeichnungen ${}^{C}_{P}\iota^{\sim}_{x}$; diese relativen bedingten abstrakten Deskriptionen stehen unter Hypothesen C und Bedingungen P, die von der Halbstabilisierung auszunehmen sind, und beziehen sich auf eine abstrakte Gleichheit $\sim$, d.h. auf ein deduzierbar reflexives komparatives Prädikatschema (wie beispielsweise $\overset{\cap}{\equiv}$). — Wie solche ι_*-Ausdrücke zu übersetzen und zu eliminieren sind, führt [10] I (S. 422—457) für einen einfacheren Fall aus; [11] p. 407—415 behandelt diesen Fall bei sukzessive eingeführten Funktionszeichen.

Werden Repräsentanten für variable transfinite Terme $\underset{+}{t}$ eingeführt, so sind sie auf Verträglichkeit mit $\overset{\cap}{\equiv}$ zu prüfen. Termmarken $\underset{+}{\vartheta}$ kann man durch Prädikatmarken $\underset{+}{\pi}$ vertreten, für die Eindeutigkeits- und Existenzeigenschaften $\bigwedge_{\alpha_1..} \bigvee_{\underset{+}{\pi}\alpha_1..\alpha}\alpha \bigwedge_{\underset{+}{\pi}\alpha_1..\beta}\beta \; \alpha = \beta$ vorauszusetzen sind, be-

vor die so entstandenen $\underset{+}{A}$ via $^{[\bullet]\circ}\underset{+}{A}$ in ein A von $\mathfrak{S}_1$ übersetzt werden. Verschiedene transfinite Terme $\underset{+}{t}, \underset{+}{s}$, für die $\bigwedge_{\alpha_1..} \underset{+}{t}\alpha_1.. = \underset{+}{s}\,\alpha_1..$, stellen „dieselbe" Funktion dar: $\lambda_{\alpha_1..}\underset{+}{t} = \lambda_{\alpha_1..}\underset{+}{s}$. Gleichungen zwischen Funktionen sind also Abkürzung für Aussagen über Ordinalzahlwerte von Termen. Funktionsmarken $\underset{+}{\varphi}$ sind Abstraktionen $\lambda_{\alpha_1..}\underset{+}{\vartheta}$ aus Termmarken. Terme, die wiederum in der formalisierten transfiniten Arithmetik beschränkt gekennzeichnet sind (: $\underset{<\gamma^+}{\iota_\alpha}\underset{+}{A}(\alpha)$), lassen sich mit ${}^{C}_{P}\iota^{\sim}_{x}$ in $\mathfrak{S}_1$ ausdrücken.

Vorbehaltlich des Beweises für den in **2.38** vorgemerkten Rekursionssatz, für den sich nach (o 1—47) aber ebenfalls genügend methodische Anleitung vorfindet, ist daraufhin klar, daß und wie die Axiome [20] 1.1.—3. und 2.1. zu übersetzen und zu beweisen sind, wenn Repräsentanten für α^+ und j vorliegen, also für den Nachfolgerterm und GÖDELS P-Funktion [6] (p. 29, 7.9).[18]

α^+ kann $\overset{\cap}{=}$-verträglich durch ${}^+\pi\,{}^+\rho(\pi)$ vertreten werden laut **2.39**. Da $P\alpha\beta = P\beta 0 + \beta + \alpha$, $= P\alpha 0 + \beta$, je nachdem $\alpha \leq \beta$ oder $\alpha > \beta$, da $P\alpha 0 = \sum_{<\alpha}\gamma(\gamma \cdot 2 + 1)$ und da $\sum_{<\alpha^+}\underset{+}{t}(\gamma)$ die additive und multiplikative Termbildung umfaßt (: $\underset{+}{t}(0) + \underset{+}{t}(1) = \sum_{<2}\underset{+}{t}(\gamma)$, $\beta \cdot \alpha = \sum_{<\alpha}\underset{+}{t}(\gamma)$ für $\underset{+}{t}(\gamma) = \beta$), genügt es, beschränkte transfinite Summen $\overset{\cap}{=}$-verträglich darzustellen:

PR repräsentiere α; $\underset{+}{t}(\underset{<\alpha}{*})$ sei durch Prädikat*formen* Q(z) S(z) repräsentiert, die für z mit Pz definiert sind und die disjunkte Prädikate zusammenfassen, d.h. $\bigvee_x Q(z_1)x \wedge Q(z_2)x \dot{\vee} \underline{S(z_1)}x \wedge \underline{S(z_2)}x. \rightarrow z_1 = z_2$; dann ist $P^{\Sigma}x \leftrightharpoons \bigvee_{P z} Q(z)x$, $R^{\Sigma}xy \leftrightharpoons \bigvee_{P z} S(z)xy \vee \bigvee_{P z_1 z_2} Rz_1z_2 \wedge Q(z_1)x \wedge$ $\wedge\, Q(z_2)y$ eine Darstellung für $\sum \underset{+}{t}$. Die für + und · benötigte disjunkte Zusammenfassung zweier Ordinalzahlrepräsentanten bzw. eines Repräsentanten für einen beschränkten konstanten Term läßt sich mit geraden und ungeraden Grundzahlen bzw. mit der Cauchy-Diagonalfolge, in der zx bekanntlich die Nummer $\frac{1}{2}((z + x)^2 + z + x \cdot 3)$ erhält, leicht bewerkstelligen — und die Rechenterme + und · für Grundzahlen sind sehr einfach mit 3-stelligen Prädikaten rekursiv definierbar (: S. 191 f.).

Um zu zeigen, daß die Regeln des elementaren klassischen Prädikatenkalküls mit Gleichheit über transfinite Aussageschemata $\underset{+}{A}$ in $\mathfrak{S}_1$ eliminierbar sind, muß man mit ${}_{S}w$ statt ${}_{\angle}w_1w_2$ arbeiten, sonst wäre das Übersetzungsantezedens manchmal lückenhaft; $\alpha = \beta \dot{\rightarrow} \underset{+}{A}(\alpha) \rightarrow \underset{+}{A}(\beta)$

[18] g^1, g^2 lassen sich dann beschränkt kennzeichnen, Iq auch. Bei 0,1-Bewertung von ($\vee$), ($\wedge$) braucht man max nicht, um Konjunktionen zu bewerten: setze $\curlyvee\alpha\beta = Iq\,0\,Iq\,\alpha\,Iq\,0\,\beta$ wonach $Cj\,\alpha\beta = \curlyvee\,\curlyvee\alpha\beta\curlyvee\alpha\beta$, wie geläufig (indem $\curlyvee$ der Bewertung beim Sheffer-Strich entspricht).

folgt dem $\underset{+}{\mathrm{A}}$-Aufbau parallel aus $\alpha = \beta \dot{\rightarrow} \alpha = \gamma \rightarrow \beta = \gamma$, und dies mit (o 15) aus $\beta \leq \alpha \leq \gamma \leq \alpha \leq \beta$.

3.2 Die Entwicklung der arithmetischen Theorie ist bis hierhin auf äußerste Allgemeinheit ausgerichtet. Dies hat den Vorteil, daß das logische Gefüge möglichst durchsichtig wird — die zwar leichter faßlichen, aber logisch irgendwie lästigen Eindeutigkeitseigenschaften, wie sie etwa der Isomorphiebegriff mit sich bringt, brauchten bei (o 1—47) ersichtlich nicht mitgeschleppt zu werden.

Nachträglich könnte man das Fundierungsmaterial sieben. Klassisch beurteilt hätte jede Ordinalzahl — extrem linear — eine wohlgeordnete Darstellung (: $\vdash \mathrm{I}(\underset{\smile}{\mathrm{R}}, \mathrm{R}^{<}) \wedge \bigwedge_{\mathrm{xyz}} \mathrm{Rxy} \wedge \mathrm{Ryz} \rightarrow \mathrm{Rxz}. \wedge \underset{\underset{\smile}{\mathrm{R}}}{\bigwedge}_{\mathrm{xy}} \mathrm{Rxy} \vee \vee \mathrm{Ryx}. \wedge \bigwedge_{\mathrm{xy}} \mathrm{Rxy} \wedge \mathrm{Ryx} \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y})$[19] und — extrem verzweigt — eine doppelt fundierte konsekutive Darstellung (: $\vdash \mathrm{I}(\mathrm{P}, \mathrm{R}) \wedge \mathrm{I}(\mathrm{P}, \mathrm{R}^{\neg}) \wedge \wedge \mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}_{\mathrm{P}}^{\triangleleft}$, wo $\mathrm{R}_{\mathrm{P}}^{\triangleleft}\,\mathrm{xy} \leftrightharpoons \overset{1}{\mathrm{R}}_{\mathrm{P}}\,\mathrm{xy} \wedge \neg \bigvee_{>1}{}_{\mathrm{z}}\, \overset{\mathrm{z}}{\mathrm{R}}_{\mathrm{P}}\,\mathrm{xy})$[20].

Interessant wird eine Siebung des in $\mathfrak{S}_1$ ableitbaren Fundierungsmaterials aber erst, wenn es darum geht, außer der „niederen" Ordinalzahltheorie (wie in **3.1**) auch die „höhere" Ordinalzahltheorie mit Ersetzungs- und Kardinalzahl-Axiomschema (z. B. [20] 2.2. und 2.3.) und mit ihr die axiomatische Mengenlehre in den Griff zu bekommen.

3.21 Um zu zeigen, daß die Ausdrucksfähigkeit von $\mathfrak{S}_1$ weit über die in Hauptsatz 1 behaupteten Übersetzungsmöglichkeiten hinausgreift, lege ich zunächst einen Repräsentanten für Prädikatmarken vor, die über unbeschränkten Ordinalzahlen einen beliebigen, transfinit hohen wie langen Typ einnehmen:

$$\underset{\mathrm{P}}{\bigwedge}_{\mathrm{x}} \mathrm{I}(\pi(\mathrm{x}), \rho(\mathrm{x})) \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{P}}{\rangle}}_{\sigma \mathrm{x}_0} (\underset{\mathrm{P}}{\bigwedge}_{\mathrm{x}} \mathrm{Rxx}_0 \dot{\rightarrow} \underset{(\neg \bigvee_{\mathrm{y}} \mathrm{Py} \wedge \mathrm{Ryx})}{} \dot{\rightarrow} \underset{\mathrm{P}}{\bigwedge}_{\mathrm{y}} \mathrm{Ryx}_0 \dot{\rightarrow} \mathrm{Syx} \rightarrow \sigma \mathrm{y} . \rightarrow \sigma \mathrm{x}) \overset{\wedge}{\underset{\vee}{\rangle}}_{{}^0\Pi_m} {}^0\Pi_l\,;$$

die Fundierung R auf P stellt den Markentyp dar, insoweit es die Vorgängerbeziehungen zwischen (den Nummern von) seinen Untertypen betrifft, und die Wohlordnung S auf P bringt diejenigen Typen, welche einem Typ mit der Nummer x_0 jeweils unmittelbar vorangehen, in die gewünschte wohlgeordnete Reihenfolge; vorgängerfreie x indizieren Ordinalzahlvariablen.

---

[19] Nähme man I bezüglich R anstelle $\mathrm{R}^{<}$, so fehlt ein Repräsentant für die Ordinalzahl 1. Eben darum in [21] S. 268 auch $\mathrm{fd}(R)$ mit $\overset{R}{<}$.

[20] Ordinalzahlen $\geq \omega_1$ sind, klassisch interpretiert, freilich nur „halbfinit" darstellbar, denn die fächerartige Vorgängerverzweigung steigt dann noch über unabzählbar viele, jedoch allemal endliche Fäden ab und (invers) auf, oder die Fäden verteilen sich auf unabzählbar viele disjunkte Büschel.

Konkrete Prädikate höheren Typs über Ordinalzahlen ergeben sich mit iterierten Rekursoren, die auf ausdrucksreichere Definiensschemata angewendet werden — z. B. in der Form $* \overset{*}{\underset{*}{\rightarrow}}_{\rho y} * \overset{*}{\underset{*}{\rightarrow}}_{\pi x} A(x, \pi;\ y, \rho)$, wobei die innere Fundierung über x auch durch ρ verlaufen kann, also durch einen Parameter der inneren Rekursifikation hindurch. Uneingeschränkte Quantifikationen vermag $\mathfrak{S}_1$ allerdings ausschließlich über transfinite Objekte vom niedrigsten Typ auszudrücken, nämlich über Ordinalzahlen.

Was $\mathfrak{S}_1$ trotzdem unter Heranziehung von Umdeutungen mindestens aufzulösen imstande ist, formulieren wir im

Hauptsatz 2. (Exorbitante Vollständigkeit.)

Es läßt sich ein finites Umdeutungsverfahren aufweisen, das jeder Deduktion $d_\in$ in der ZERMELO-FRAENKEL-SKOLEMschen Mengenlehre beziehungsweise jeder Deduktion $d_<$ in der nach TAKEUTI formalisierten klassischen Ordinalzahltheorie (mit Ersetzungs- und Kardinalzahl-Axiomschema) eine Deduktion aus $\mathfrak{S}_1$ zuordnet. Die Umdeutung stimmt ordinalzahltheoretisch bei quantorenfreien Aussageformen mit der Übersetzung im Hauptsatz 1 überein, aber schon dabei hängt der zur Lösung der Umdeutung benötigte Substitutionsbezirk für freie Variablen von der Ausgangsdeduktion $d_<$ ab.

3.22 *Beweisvorbereitungen.* Die Grundrelationen $\in$ und $=$ zwischen GÖDELS konstruktiblen Mengen $F^c\alpha$ (: [6] 9.3, p. 37) fließen innerhalb einer eigenständigen Ordinalzahltheorie aus TAKEUTIS Prädikat fn (: [19] p. 208), das mit beschränkt aufgebautem Definiens transfinit rekursiv definiert ist. Transfinite Rekursionen werden also in dem unter **2.38** erwähnten Umfang benutzt: $(\vee) \overset{<}{\underset{\vee}{\rightarrow}}_{\pi\alpha} \underset{\alpha}{A}$, wo $\underset{\alpha}{A}$ andeutet, daß $_{<\alpha}$ jeden Operator beschränkt, der am Aufbau von A beteiligt ist — ebenso nachher bei $\underset{\alpha}{\tau}$.

fn sei nun im Anschluß an die stabilisierende Übersetzung $^{\bullet\circ}$ einer Umdeutung $^{\wedge}$ unterworfen, welche die GÖDELsche [7] transfinit fortsetzt und auf transfinite Rekursoren der eben genannten Form überträgt. Im folgenden bringe ich eine Verbalfassung der erforderlichen Typenkonstruktion und daraufhin den Aufbau der Kerne der umdeutenden Formeln; der Zweck der normierten Typenrechnung beim Umdeuten wird aus **3.23** ersichtlich.

Typen. [o sei vom Typ $_{\circ}$.] Ordinalzahlen —konstante, beschränkt variable, markenmäßige— seien vom Typ $_0$. Mit τ_1, τ_2 seien auch $_\smile\tau_1\tau_2$ und $^\frown\tau_1\tau_2$ Typen; $\tau = {}_\smile\tau_1\tau_2$ ist der Typ für die „Verbindung" $c^\tau = {}_\smile c_1^{\tau_1} c_2^{\tau_2}$ zweier Funktionale, $\tau = {}^\frown\tau_1\tau_2$ ist der Typ für ein Funktional c^τ mit τ_1-typigem Argument und τ_2-typigem Wert (: ${}^c c^\tau c_1^{\tau_1} = c_2^{\tau_2}$). Ferner seien eingeführt: 1. eine Liste einstelliger Typmarken $\overset{0}{\tau}, \overset{1}{\tau}, \ldots$, 2. Typformen $\tau(\alpha)$, zunächst mittels Marken $\dot{\tau}$, später auch mittels

Typtermen $\tau = \sqcap_{\dot{\tau}\alpha} v$, 3. beschränkte Typfolgen $\lambda_\alpha \tau(\alpha)$, 4. unbeschränkte Typfunktionen $\lambda_{\alpha<\gamma} \tau(\alpha)$, 5. Typschemata $v(\alpha, .., \dot{\tau}, ..)$, die sich aus den konstanten Typen $_{\circ}$, $_{0}$ sowie aus Typformen $\dot{\tau}(\alpha)$ mit Hilfe der Typfunktoren $\smile$, $\frown$ und der Typoperatoren λ_α, $\lambda_{\alpha<\gamma}$ einschließlich des noch folgenden Typrekursors $\sqcap_{\dot{\tau}\alpha}$ aufbauen lassen, 6. Typterme $\sqcap_{\dot{\tau}\alpha} \tau(\alpha, \dot{\tau})$, die für beschränkt aufgebaute Typschemata $\tau = \underset{\alpha}{\tau}$ eine Typform rekursiv definieren, und zwar gemäß $\sqcap_{\dot{\tau}\alpha} \tau(\alpha, \dot{\tau})(\beta) = \tau(\beta, \sqcap_{\dot{\tau}\alpha} \tau)$; zudem simultan definierte Typterme $\sqcap_{\smile \dot{\tau}_1 \dot{\tau}_2 \alpha} \smile \tau_1(\alpha, \dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2) \tau_2(\alpha, \dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)$ derselben Art.

Zu jedem so erzielten Typschema τ werden außer Funktional„konstanten" c^τ noch Marken a^τ einkalkuliert. Es bezeichne $\underset{2}{\Delta_1} \smile c_1 c_2 = \underset{2}{c_1}$ den ersten bzw. zweiten Bestandteil bei Zerlegung einer Verbindung, und es stehe $\Delta_{..mn}$ für $..\Delta_m \Delta_n$; entsprechend bei $\smile a_1 a_2$ sowie $\smile \tau_1 \tau_2$.

Kerne. Die mit $\wedge\!\!\!\!\wedge$ bezeichneten operatorenfreien Kerne der erweiterten GÖDELschen Umdeutung von $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_{\alpha}$, $\bigwedge_{\alpha}$, $(\bigvee)\overset{<}{\underset{\vee}{\rightarrow}}_{\pi\alpha}$ bauen sich dann folgendermaßen auf:

$$\wedge\!\!\!\!\wedge(\pi\alpha_1 ..) \leftrightharpoons (\wedge\!\!\!\!\wedge\pi\alpha_1 .. c^{\tau(\alpha_1,..)}(\alpha_1, ..) a^{v(\alpha_1,..)}(\alpha_1, ..)),$$

mit passenden Marken[21] $\overset{k}{\tau}$, $\overset{l}{\tau}$ als Konstantentyp τ und Markentyp v, kürzer $\leftrightharpoons \wedge\!\!\!\!\wedge\pi(\alpha_1, ..; c, a)$; $\wedge\!\!\!\!\wedge\leq \leftrightharpoons \leq$ mit $\tau = v = _{\circ}$; ebenso $\wedge\!\!\!\!\wedge\vee \leftrightharpoons \vee$, $\wedge\!\!\!\!\wedge\wedge \leftrightharpoons \wedge$; wenn bereits $\wedge\!\!\!\!\wedge B_1 \leftrightharpoons D_1(c_1, a_1)$ und $\wedge\!\!\!\!\wedge B_2 \leftrightharpoons D_2(c_2, a_2)$, dann sei

$$\wedge\!\!\!\!\wedge(B_1 \rightarrow B_2) \leftrightharpoons D(c, a) \leftrightharpoons D_1(\Delta_1 a, {}^c\Delta_2 c\ a) \rightarrow D_2({}^c\Delta_1 c\, \Delta_1 a, \Delta_2 a)$$
$$\text{mit } \tau = \smile\frown\tau_1 \tau_2 \frown\smile\tau_1 v_2 v_1,\ v = \smile\tau_1 v_2,$$

speziell $\wedge\!\!\!\!\wedge(\neg B_1) \leftrightharpoons \neg D_1(a, {}^c c\, a)$ mit $\tau = \frown\tau_1 v_1$, $v = \tau_1$, sofern

$$\frown\dot{\tau}_{\circ} = _{\circ},\ \smile_{\circ}\dot{\tau} = \smile\dot{\tau}_{\circ} = \dot{\tau}[= \frown_{\circ}\dot{\tau}],$$

weiter $\wedge\!\!\!\!\wedge(\neg\neg B_1) \leftrightharpoons \neg\neg D_1({}^c c\, a, {}^c a\, {}^c c\, a)$ mit $\tau = \frown\frown\tau_1 v_1 \tau_1$, $v = \frown\tau_1 v_1$; ebenso sei dann

$$\wedge\!\!\!\!\wedge(B_1 \wedge B_2) \leftrightharpoons D(c, a) \leftrightharpoons D_1(\Delta_1 c, \Delta_1 a) \wedge D_2(\Delta_2 c, \Delta_2 a)$$

mit $\tau = \smile\tau_1 \tau_2$, $v = \smile v_1 v_2$,[22]

$$\wedge\!\!\!\!\wedge(B_1 \vee B_2) \leftrightharpoons D(c, a) \leftrightharpoons \Delta_1 c = 0 \wedge D_1(\Delta_{12} c, \Delta_1 a) \dot{\vee}$$
$$\dot{\vee}\ \Delta_1 c = 1 \wedge D_2(\Delta_{22} c, \Delta_2 a) \quad \text{mit} \quad \tau = \smile_0 \smile \tau_1 \tau_2,\ v = \smile v_1 v_2;$$

---

[21] Einstellige π genügen, wenn man sich auf fn konzentriert. Sonst sind auch Listen mehrstelliger Typmarken nötig.

[22] In SPECTORS Verifikation von [7] ist die Auflösung der Umdeutung für die Schlußregel A 7 nicht „similar to A 6" (: [18] p. 14, Zeile 4) zu konstatieren. In Fußnote 7 dazu (: [18] p. 10) meint KREISEL, A 7 könne im Sinne von [7] S. 286 durch Perm ersetzt werden. Zur Elimination von A 7 gehe ich aus von Sum für $\wedge$ anstelle $\vee$, und ich benötige außer Syll (d.i. SPECTORS A 4) die Dualisierung von Taut wie Perm. Sum für $\wedge$ ist in [7] nicht postuliert; es zu eliminieren, gelang mir nicht — aber dessen Umdeutung ist, im Unterschied zu der von A 7, leicht aufzulösen.

wenn bereits $^{\wedge}B_0(\alpha) \leftrightharpoons D_0(\alpha;\, c_0, a_0)$, dann sei

$$^{\wedge}(\bigvee_{\substack{\alpha \\ [<\gamma]}} B_0) \leftrightharpoons D(c, a) \leftrightharpoons [\Delta_1 c < \gamma \wedge] D_0(\Delta_1 c;\, \Delta_2 c, a)$$

$$\text{mit} \quad \tau = \smile_{\substack{0 \\ [<\gamma]}} \lambda_{\substack{\alpha \\ [<\gamma]}} \tau_0,\ v = \lambda_{\substack{\alpha \\ [<\gamma]}} v_0,$$

$$^{\wedge}(\bigwedge_{\substack{\alpha \\ [<\gamma]}} B_0) \leftrightharpoons D(c, a) \leftrightharpoons [\Delta_1 a < \gamma \rightarrow] D_0(\Delta_1 a;\, {}^{c}c\, \Delta_1 a, \Delta_2 a)$$

$$\text{mit} \quad \tau = \frown_{\substack{0 \\ [<\gamma]}} \lambda_{\substack{\alpha \\ [<\gamma]}} \tau_0,\ v = \smile_{\substack{0 \\ [<\gamma]}} \lambda_{\substack{\alpha \\ [<\gamma]}} v_0$$

(beachte, daß in ${}^{c}c\Delta_1 a$ vom Typ $\lambda_{\substack{\alpha \\ [<\gamma]}} \tau_0$ noch $\Delta_1 a$ substituiert wird, so daß ${}^{cc}c\Delta_1 a\Delta_1 a$ vom Typ $\tau_0(\Delta_1 a)$ ist, ähnlich ${}^{c}\Delta_2 a\Delta_1 a$ vom Typ $v_0(\Delta_1 a)$, und zuvor ${}^{c}\Delta_2 c\Delta_1 c$ vom Typ $\tau_0(\Delta_1 c)$, ${}^{c}a\Delta_1 c$ vom Typ $v_0(\Delta_1 c)$); wenn bereits $^{\wedge}\underset{\alpha}{B_0}(\alpha, \pi) \leftrightharpoons D_0(\alpha, D_\pi, c_\pi, a_\pi;\, c_0, a_0)$ mit $\tau_0(\alpha, \overset{k}{\tau}, \overset{l}{\tau})$, $v_0(\alpha, \overset{k}{\tau}, \overset{l}{\tau})$, dann sei $^{\wedge}((\bigvee) \underset{\vee}{\overset{<}{\rightarrow}}_{\pi\alpha} \underset{\alpha}{B_0} \bullet \beta) \leftrightharpoons D(\beta;\, c, a) \leftrightarrow D_0(\beta, D, \overset{\beta}{c}, \overset{\beta}{a};\, c_0, a_0)$, wo $\overset{\beta}{c} = \lambda_{\substack{\alpha \\ <\beta}} c$, $\overset{\beta}{a} = \lambda_{\substack{\alpha \\ <\beta}} a$ und $c(\alpha) = c_0(\alpha, \overset{\alpha}{c}, \overset{\alpha}{a})$, $a(\alpha) = a_0(\alpha, \overset{\alpha}{c}, \overset{\alpha}{a})$, mit

$$\smile\tau v = \equiv \smile_{\tau\tau\beta}^{kl} \smile \tau_0(\beta, \lambda_{\substack{\alpha \\ <\beta}} \overset{k}{\tau}, \lambda_{\substack{\alpha \\ <\beta}} \overset{l}{\tau})\, v_0(\beta, \lambda_{\substack{\alpha \\ <\beta}} \overset{k}{\tau}, \lambda_{\substack{\alpha \\ <\beta}} \overset{l}{\tau}).$$

Die Typenrechnung für $^{\wedge\bullet\circ}$fn hängt ordinalzahlarithmetisch noch von den in die Definition von fn eingehenden transfiniten Funktionen j (und g^1, g^2), g_1, g_2 (und g_0) ab (: [19] p. 202, 206 oder [20] p. 296, 301), welche GÖDELS Funktionen P, K_1, K_2 entsprechen (: [6] 7.9, 9.24; p. 29, 36). Für Argumente, die in CANTORscher Normalform gegeben sind, lassen sich diese Funktionen direkt auswerten, da man $P\beta 0 = \sum_{\substack{\gamma \\ <\beta}} (\gamma \cdot 2 + 1)$ nach meiner vom Januar 1964 datierenden Notiz [24] explizit in $+, \cdot, \lambda$ (: $*^*$) ausdrücken kann. Die dortige Summationsformel mit 9 Fällen — explizit spaltet sich der 3. Fall in 4 Unterfälle, dem 2., 4., 5., 6. Fall entsprechend — ziehe ich inzwischen[23] auf 2 Fälle zusammen:

Es sei $k, l, m < \omega$, $0^0 = 1$, $g\alpha = \iota_\nu \omega^\nu \leq 1 + \alpha < \omega^{\nu+1}$ und $\eta < \omega^\xi$, $g(\omega \cdot \beta^*) < g(\omega^{\omega^\xi \cdot (1+k)} \cdot (1 + \omega^\eta \cdot l))$; dann wird $P\beta 0 = l^2$,

$$= \omega^{\omega^\xi \cdot (1+k)} \cdot (\omega^{\omega^\xi \cdot k} \cdot (1 + \omega^{\omega^\xi + \eta} \cdot l) + (1 + \omega^\eta \cdot l) \cdot (\omega \cdot \beta^* + 2m)) + \\ + \omega \cdot \beta^* \cdot (1 - 0^m) + m,$$

je nachdem $\beta = l$, $= \omega^{\omega^\xi \cdot (1+k)} \cdot (1 + \omega^\eta \cdot l) + \omega \cdot \beta^* + m$; für jedes β existiert genau ein Tupel $\xi, k, \eta, l, \beta^*, m$, falls $\eta > 0 \rightarrow l > 0$.

Beweisanleitung: die Induktionsaufgabe vereinfacht sich durch ein Lemma, wonach $P\beta_0 0 = P\beta_1 0 + \omega^{g\beta_1} \cdot \beta_2$, wenn

---

[23] Anläßlich einer internationalen Tagung über „Universelle Algebra" im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach habe ich am 29. Juli 1966 einen Vortrag „Über eine formal-universelle Arithmetik" gehalten, bei dem die neue Version ohne Beweis bekanntgegeben wurde.

$$\beta_0 = \beta_1 + \beta_2 \wedge (g\,\beta_2 < g\,\beta_1 \wedge \beta_2 = \omega \cdot \beta_2^* \;\dot{\vee}$$
$$\dot{\vee}\; 0 < g\,\beta_1 \wedge 0 < l' < \omega \wedge 0 \leq \mu < \omega^{g g \beta_1} \wedge \beta_2 = \omega^{g \beta_1 + \mu} \cdot l')\,.$$

Zur Lösung der $\wedge\!\bullet\!\circ$-Umdeutung von $d_<$, die (gemäß [20] p. 316) aus $d_\in$ hervorgehen, werden in erster Linie primitiv rekursive Funktionale jeden durch $\wedge\!\bullet\!\circ$fn geforderten Typs benutzt. Abweichend von [20] wird die beschränkte transfinite Minimumbildung $\underset{<\alpha}{\mu_\xi}$ nicht zu den primitiv rekursiven transfiniten Operationen gezählt, weil konstruktiv im allgemeinen unentschieden bleibt, ob $\underset{<\alpha}{\bigvee_\xi} \mathrm{f} = 0$ oder $\underset{<\alpha}{\bigwedge_\xi} \mathrm{f} \neq 0$. (Eben deshalb nehmen wir auch das Prädikat fn in [19] p. 208 zum Ausgangspunkt und nicht die Funktion fn in [20] p. 302.)

Um innerhalb $\mathfrak{S}_1$ primitiv rekursive Funktionale für jeden erforderlichen Typ zu erhalten, chiffriere man zunächst, wenn γ durch PR repräsentiert wird, auf P bezüglich R die „bis" γ beschränkt aufgebauten Typschemata. Rekursive Definitionen von Funktionalrepräsentanten stützen sich dann auf eine teils zur Fundierung abgestellte, aber gleichzeitig als Typnumerierung $\ulcorner\tau\urcorner$ fungierende Variable; die einfache Verschachtelung ${}^{\subset}\mathrm{c}^{\tau}\mathrm{c}_1^{\tau_1} = \mathrm{c}_2^{\tau_2}$ wird entflochten zu einer Aussage

$$\mathrm{B}(\mathrm{Q}(\ulcorner\tau\urcorner, ..),\ \mathrm{Q}_1(\ulcorner\tau_1\urcorner, ..),\ \mathrm{Q}_2(\ulcorner\tau_2\urcorner, ..))\,,$$

welche $=$ auf $\overset{\cap}{=}$ zwischen Repräsentanten vom Typ $_0$ zurückspult; die zusammenfassende Überlagerung begrenzter transfiniter Schachtelung mittels $\underset{<\beta(\leq\gamma)}{\lambda_\alpha}$, im allgemeinen via $\underset{\smile}{=}_{\dot{\tau}_1 \dot{\tau}_2 \alpha}$ selbst transfinit geschachtelt, ist mit iterierten Rekursoren zu bewerkstelligen. Bei Einführung von Repräsentanten für Funktionalmarken der „bis" γ numerierten Typschemata dient die $=$-entflechtende Übersetzung der Eindeutigkeitsforderung als Hypothese. Nachdem für festgehaltenes γ alle gewünschten Termarten dargestellt sind, kann man PR noch schematisch durch $\pi\,\rho$ unter $\mathrm{I}(\pi, \rho)$ ersetzen und bei verschiedenen Darstellungen „desselben" Abschnitts gewisse Isomorphieeigenschaften beweisen, die den Übergang von $\underset{<\gamma}{\lambda_\alpha}$ zu λ_α rechtfertigen.

3.23 *Abriß der Beweisausführung (Obstruktionstheorie).* Der weitere Gang der Überlegung sei im vorliegenden Rahmen wenigstens noch umrissen. Zur besseren Orientierung über die Vielfalt der (letztlich wieder kanonisch) zu regelnden Denkvorgänge diene eine zeichnerische Wiedergabe ihres kybernetischen Schemas.

Der äußere Kreis, bei dem Prädikate P, Aussagen A und Sätze S miteinander verflochten sind, ist in **1.** ausgiebig behandelt; die Zebrastreifen auf den Wegen PA und AS deuten die Regeln 9.2.* bzw. 9.3.* an, die Streifendichte steht in grobem Verhältnis zur Regelzahl, der Pfeil SP entspricht der Regel 9.1.5. (Für 9.1.1—4 fehlt ein zeichnerisches Gegenstück ebenso wie für 1. bis 7. und 8.1.—3..) Der Übergang SO zu transfiniten Ordinalzahlen O ist aus **2.** geläufig.

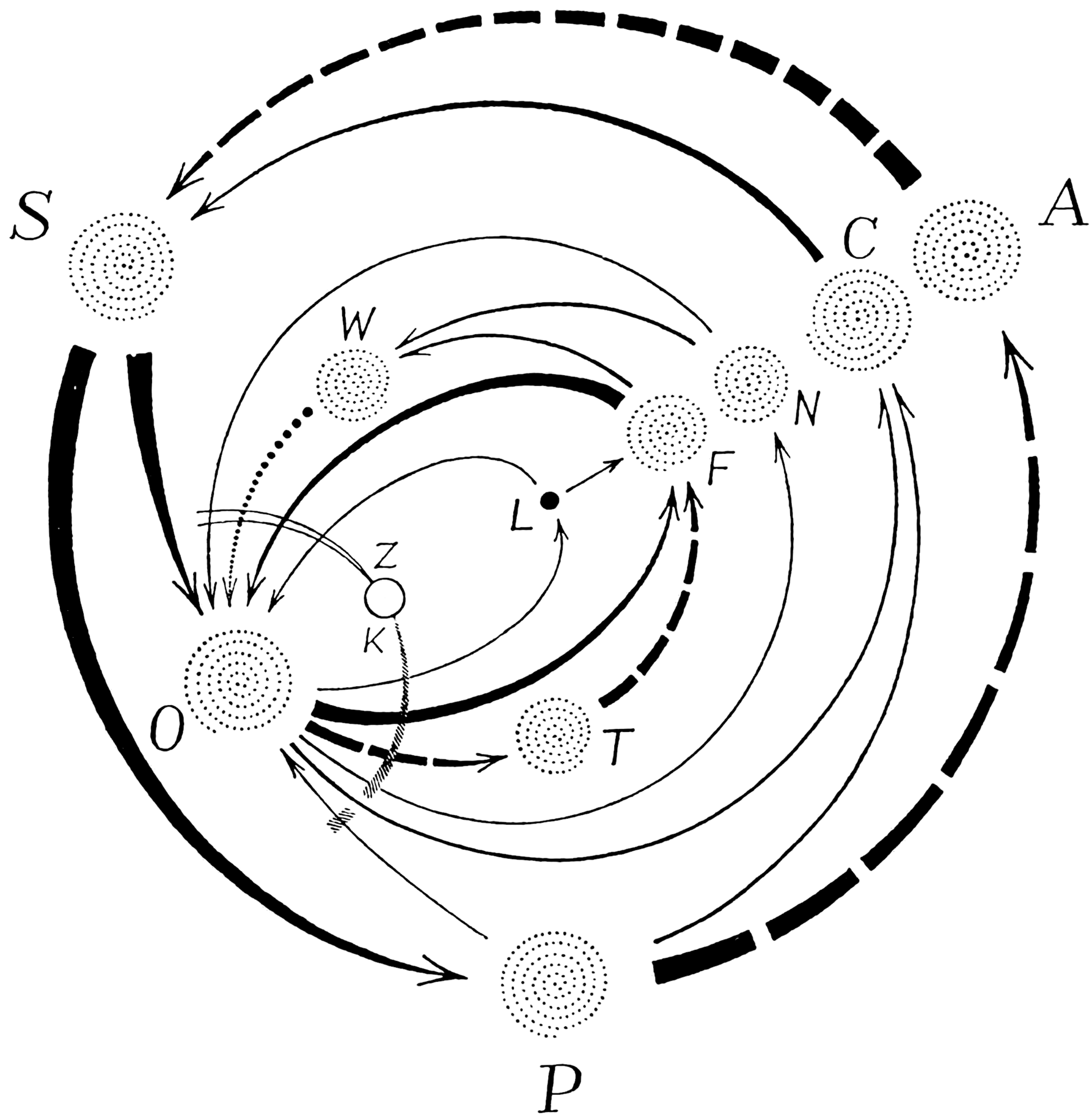
Den Schritt von O und P zu Chiffrierungen C, sowie von da zurück nach S, jedesmal per Reflexion, kennen wir (wenn auch nicht kanonisch) aus **0.52**. Dieser

koerzible Perfektionsprozeß läßt sich — analog **0.51** — ebenfalls durch Einfädelung von Ordinalzahlmarken via PO aufstocken. Soweit es sich um das ZERMELO-FRAENKEL-SKOLEMsche System handelt, brauchen wir C aber nicht und können von SO allein starten (ohne OP—C, CS und erst recht ohne PO).

Die Punktspiralen sollen die aus den Regeln produzierten Formeln wiedergeben; die im Verschlüsseln steckende Widerspiegelung klingt im Wechsel des Drehsinns der Spiralen an. Die unterschiedliche Breite der Pfeile soll die Häufigkeit der Regelanwendung zeigen — z. B. wird der dünne Weg PO am seltensten herangezogen.

Von der restlichen Linienführung in der Zeichnung können wir uns vorerst bloß eine bildhafte Verdeutlichung machen, ehe wir daraus die im Vorwort erwähnten Bezirke $\mathrm{T}(d_<)$ von Ordinalzahlen O, Typen T und Funktionen F konkretisieren.

Die Sperre auf dem Weg PO rührt vom Kontrollzentrum K her, das seine obstruktive, dem freien Produzieren entgegenwirkende Tendenz — von der Verzögerung über die Hemmung bis zur Drosselung — aber erst einmal auf die kleineren Schnecken T, F, N (Numerierung) und auf L (Limitation) ausübt. Während K die von der Quelle O gespeiste Ausfuhr steuert, hat das Zählregister Z die wieder in O mündende Einfuhr, die teils vom Wohlordnungswerk W abfließt, zu sichten und die Neueingänge vor der Abfertigung ihrer Herkunft nach zu etikettieren. Der von K ausgehende Riegel ist wegen OC unterbrochen und kehrt an der Bruchstelle seine Durchlaßrichtung um — was auch die Strichelung zeigen soll. Die von Z ausgehende Einlaßschranke hat demgegenüber keine obstruktive Wirkung, sondern eine über-



wachende Aufgabe. Z und K sind zu einem Leitkreis aufeinander abgestimmt: K richtet sich bei der Steuerung nach der Etikettierung und darf seine Anweisungen an die Adressen von O, F, T, N, W, L nur geben, solange Z noch registrierte Einsatznummern zum Abruf frei vorrätig hat.

Zur Konstruktion von $\mathrm{T}(d_<)$ gehen wir aus von den Typen, die in den $\wedge\bullet\circ$-Kernen der Formeln von ganz $d_<$ vorkommen. (Eine nachträgliche Umformung oder Verlängerung von $d_<$ wird nicht erlaubt, weil dann die schließliche Lösung der Anfangszahlfunktion ω_α i. a. wechselt.) Das Ziel ist nun, eine aus möglichst wenig Ordinalzahlen, Typen und Funktionen bestehende Konstanten-Hülle zu konstruieren, innerhalb der $\wedge\bullet\circ d_<$ lösbar ist.

Wegen des Kardinalzahl-Axiomschemas muß das aufzuzählende System $\mathrm{T}(d_<)$ so ausgeglichen sein, daß man darin in nuce eine Spielart von GÖDELS $\in$-isomorpher „Kompression" [6] 12.3—6 (p. 54—61) durchführen kann, nur daß hier, obstruktiv, die für Marken zur Substitution zuzulassenden Konstanten im Aufzählbaren selbst einzuschränken sind und das Komprimat isomorph zu sein hat gegenüber einer Reihe von Operationen mit Ordinalzahlen, Typen und Funktionen. Im Unterschied zu GÖDEL [6] p. 37, wo die Operationen $\mathfrak{F}_{1-8}$ und eine Zusammenfassung vorgängiger Erzeugnisse als 9. Operation zyklisch zur Anwendung kommen, arbeiten wir mit etwas mehr rhythmisch akzentuierten Einsätzen, um die Produktion neu anzukurbeln, nachdem sie sich anderwärts in Teilabgeschlossenheiten erschöpft hat.

Die besagten Operationen sind bei den Ordinalzahlen: die Rechenoperationen; die Bildung des Wohlordnungstyps von Funktionswert-Nummern zu konstanten Argumenten, deren Nummern einem Ordinalzahlabschnitt angehören, dessen Grenze L bereits ausgegeben hat; die Limitation selbst in Anwendung auf das noch zu besprechende Schaltschema zwischen $O-N-O$ und $O-F-O$. Bei den Typen sind es: $\smile$, $\frown$, $\lambda_{\alpha<\gamma}$; ein Typformschema, das derjenigen transfiniten Schachtelung entspricht, die zur Lösung der umgedeuteten Schlußregel der transfiniten Induktion[24] erforderlich ist — dieses Schema setzt die finite Schachtelung mit konstantem Werttyp in SPECTORS Lemma zur Verifikation von [7] (: [18] 9. D, p. 14/15) transfinit fort, indem es die jeweils vorangegangenen Typen zu einer Folge zusammenfaßt, zumindest an den Limesstellen. Sonstige Typfunktionen, -schemata und -terme aus $\wedge\bullet\circ d_<$ dienen lediglich als zusätzliche Anfänge. Bei den Funktionen sind es: die primitiv rekursiven Funktionalschemata (ohne unberechenbare, auf transfinit viele Auswertungen reflektierende Modifikation); die beschränkte Ab-

[24] Beim Umdeuten der transfiniten Induktion ist es bequemer, Prämisseneigenschaften heranzuziehen und demgemäß nicht mit einem Axiomschema zu arbeiten, sondern mit einem Schlußschema, dessen Prämisse die $<$-Progressivität ist.

straktion λ_{α}; eine Funktion, welche die Limitationsausgaben (als Werte)
$<\gamma$
ihren Eingabenummern (als Argumenten) zuordnet.

Der obstruktive Arbeitsvorgang sei grob wie folgt charakterisiert.

Wenn K (nach Abruf in Z) bei O neue Ordinalzahlen anfordert, so wendet O die Rechenoperationen auf obstruktiv schon registrierte Ordinalzahlen an; die restlichen Ordinalzahlbildungen nehmen W und L vor. Bei Anforderung von Typen wendet T die Typoperationen und -anfänge auf dort erzielte Typen an; diese Typen sind zugleich für die Typmarken einzusetzen, und als Substitute für transfinite Variablen werden registrierte Ordinalzahlen herangezogen (OT). T gibt neben geschlossenen Typen auch Typformen an F weiter (TF).

Bevor K jedoch Typen anfordert, erteilt K entsprechende Aufträge an F zwecks Funktionsbildungen; dabei kann F auch jenen Abschnitt der vorhin letztgenannten Funktion anwenden, den L bereits sukzessive angewiesen hat. F bildet selbsttätig alle Funktionswerte für Argumente, die dort schon erzielt worden sind oder die, sofern $_0$ ihr Typ ist, den Weg OF dank Registriervermerk seitens Z passiert haben; die entstandenen Werte vom Typ $_0$ läßt F wieder durch Z überprüfen (FO). Registriert Z via $O-F-O$ keine Neueingänge mehr, fragt K bei Z an, ob T noch einsatzfähig ist. Im bejahenden Fall wird der Kreis $O-F-O$ neu angetrieben durch Typen, die $O-T-F$ einschleust.

Ist auch die Bahn $O-F-O \dot{-} T-F$ abgeschlossen, dann versucht K den Abruf von N. Im Erfolgsfall (ON) liefert N eine transfinite Numerierung aller bis dahin obstruktiv angesammelten Ordinalzahlen, Typen und Funktionen; diese „Auszählung", die mit Rücksicht auf spätere Kompressionsakte rechnerisch besonders ausgefeilt ist, läßt sich mit einem Prädikat aus $\mathfrak{S}_1$ vollziehen. Die als Nummern benutzten Ordinalzahlen werden wieder registriert (NO). In Zusammenarbeit mit F bildet N selbsttätig solche Funktionen vom Typ $\frown_{00}$, die Nummernbilder der bei F gespeicherten Funktionen sind, und schickt sie nach W ($NF-W$). W bildet daraus die Wertwohlordnungen für Argumentabschnitte, die L bereits begrenzt hat; diese Wohlordnungen stellen Ordinalzahlen dar, die in $\mathfrak{S}_1$ deduktiv zu erreichen sind — und zwar mit (o 2) in **2.321**, sobald die Grenze des Nummernbezirks erreicht ist. Alle Ordinalzahlen unterhalb solcher Wohlordnungstypen überweist W an Z, wonach lückenlos besetzte, „inkompressible" Ordinalzahlabschnitte zur Verarbeitung kommen (WO). So wird $O-F-O \dot{-} T-F$ neu belebt durch $O-N-O \dot{-} NF-W-O$.

Ist das Wechselspiel zwischen diesen beiden Teilschaltungen wiederum zur Stagnation gekommen, so fordert K bei Z die nächste registrierte Ordinalzahl an, die noch nicht als Eingabenummer für L abgerufen wurde; Z gibt diese selbst aber nur dann frei, wenn sie mitsamt allen vorgängigen Eingabenummern einem bereits von W ausgegebenen Ordinalzahlabschnitt entstammt — sonst behält sich Z vor, aufgrund späterer Ausstöße von W sämtliche bis dahin aus Ersatznummern entsprungenen Produkte umzudatieren. Im Freigabefall (OL) liefert L den Limes aller von W schon obstruktiv erreichten Wohlordnungen; dieser Limes ist wieder in $\mathfrak{S}_1$ deduktiv zu erreichen, weil die benutzten Abschließungen letzten Endes über eine Iteration mit Grundzahlindex durch gewöhnliche vollständige Induktion beherrscht werden. L gibt F den neuen Limeswert zur Ergänzung der limitierenden Funktion bekannt (LF) und läßt ihn registrieren (LO).

Wenn Z schließlich — ohne die äußere Hilfe weiterer Schaltelemente — über keine Ordinalzahl mehr verfügt, die L zum Einsatz bringt, dann sind wir fertig.

Mit dem so erhaltenen System $\mathrm{T}(d_<)$ ist $\bigvee\!\!\!\wedge \bullet\circ d_<$ lösbar. Um dies für die in $d_<$ auftretenden Anwendungen des Kardinalzahl-Axiomschemas ein-

zusehen, muß nachgewiesen werden, daß jede in F vorrätige Funktion vom Typ $\frown_{00}$ nach Einengung auf einen Argumentabschnitt, dessen Grenze ein von L ausgegebener Limes ist, Wertlücken aufweist, die dem nächsten von L ausgegebenen Limes vorangehen. Und das geschieht durch ein Kompressionsverfahren innerhalb $\mathrm{T}(d_<)$.

Zur Konstruktion dieser Hierarchie der $\mathrm{T}(d_<)$ könnte man die Hilfsformen und -schemata nachträglich abstreifen, um sich einerseits auf den jeweils entstandenen Konstantenbezirk zu beschränken und um andererseits innerhalb $\mathfrak{S}_1$ ohne quantifikativ gebundene Marken sowie ohne relative Definitionen vorzugehen. Damit kommen wir einer Inspiration von WEYL entgegen, der sich, wie bekannt (: etwa [26], insbesondere 5., 6.), dagegen gesträubt hat, die erste Schicht einer allein mit Quantifikation über Grundzahlen errichteten Typenkonstruktion zu überschreiten und sich für einen möglichst weiten, auf einen Schlag eingesetzten Vorrat an Grundoperationen ausgesprochen hat.

Will man mengentheoretische Systeme, die über das ZERMELO-FRAENKEL-SKOLEMsche System hinausreichen, aber den elementaren klassischen Prädikatenkalkül mit Gleichheit durch extralogische Axiome oder Axiomschemata verstärken, nach entsprechender Umdeutung auflösen, so hat man in einfacheren Fällen — etwa beim BERNAYS-GÖDEL-System — zusätzliche Schaltstellen für Limitationen einzuführen oder in verwickelteren Fällen solche Schaltstellen mit Hilfe eines Schaltelements für Indizierungen zu staffeln.

3.24 *Digression.* Eine nähere Inspektion des Wf.beweises führt zu einer Ordinalzahl, die „relativ exorbitant" ist, indem sie die Deduktionsstärke des ZERMELO-FRAENKEL-SKOLEMschen Systems (: ZF) mißt oder majorisiert. Es ist denkbar (oder vielleicht zu vermuten), daß diese Grenzzahl verhältnismäßig niedrig ist — so klein, daß sie auch innerhalb ZF oder gar in einem Teilsystem der klassischen Analysis deduktiv zu erreichen ist. Da die Lösung der Umdeutung für eine solche Erreichbarkeits-Deduktion keine ebensolche ist, ergäbe dies keinen unmittelbaren Widerspruch zu GÖDELS Wf.unableitbarkeit [5].

Die in [5] benutzten Beweismittel sind zwar höchst konstruktiv (: [14] S. 129 bis 132), aber nicht finit, jedenfalls nicht direkt anschaulich[25]. Finit steckt in "r ist ableitbar" der Aufweis einer konkreten Ableitung, die mit r endet; und solche Aussagen $\vdash r$ sind finit nicht negationsfähig, sofern nicht zufällig ein direktes Entscheidungsverfahren (vgl. **0.12**) vorliegt. Es steht jedoch frei, $\nvdash f$ finit als Redeweise für "jede Ableitung endet mit einer Figur r, die semiotisch ungleich f" zu verstehen. Diese semiotische Ungleichheit kommt nicht unter den Primfiguren vor, mit denen der Ableitbarkeitsbegriff arbeitet, und ist leicht direkt zu entscheiden. Finite Unableitbarkeitsbeweise erfolgen dann durch direkte Ableitungsinduktion für die vereinbarte Redeweise; der Induktionsschritt muß dabei von Annahmen ausgehen, die jeweils schon anschaulich zu verwirklichen sind. Die Unableitbarkeitsbeweise in [5] erfolgen demgegenüber indirekt: die hypothetische Annahme einer Ableitung wird widerlegt.

---

[25] Diese Ansicht ist nicht unverträglich mit Äußerungen von BERNAYS und GÖDEL. BERNAYS bemerkte 1957 in Amsterdam während einer öffentlichen Diskussion über Intuitionismus, die hypothetische Annahme einer Konstruktion sei keine anschauliche Annahme. (Vgl. auch seine Ausführungen in *L'Enseignement mathématique* 34 (1935), p. 62f.) Zu solchen Konstruktionen zählt aber bereits der Aufweis einer Ableitung nach gegebenen Regeln: vgl. dazu GÖDELS Fußnote 2 in [7] S. 281.

Der finit-direkte Kern des Gödelschen Beweisgangs ist der Aufweis eines rein arithmetischen Terms t(x), für den im Peano-Formalismus folgende Formel ableitbar ist: B sei ein primitiv rekursives Prädikat, für das, ähnlich der Symbolik in **0.52** und **2.4**, $B(k, \mathrm{cf}\, A(\xi))$ konstantenweise $\mathrm{dd}(k, \mathrm{cf}\, A({}^{(\mathrm{cf}\, A(\xi))}0))$ ausdrückt, ferner sei $g \leftrightharpoons \mathrm{cf} \bigwedge x \neg B(x, \xi)$ und $w \leftrightharpoons \mathrm{cf} \bigwedge$, dann gilt $\vdash B(x, {}^{(g)}0) \rightarrow B(t(x), {}^{(w)}0)$. (Vgl. dazu [10] II, speziell § 5.2.)

Will man der indirekt erschlossenen Behauptung $\nvdash \neg \bigvee x\, B(x, {}^{(w)}0)$ eine finit-direkte Wendung geben, so ist $\nvdash$ offenbar entweder selbst zu formalisieren (unter Einbettung des Peano-Formalismus in ein formales Metasystem) oder erneut zu verschlüsseln. Die bei wiederholter Verschlüsselung entstehende Situation sei flüchtig skizziert am Beispiel der ZF-Ableitbarkeit, um uns so zugleich die denkbaren Konsequenzen des in **3.23** umrissenen Wf.beweises zu vergegenwärtigen.

In ZF sei $\ulcorner \nvdash_{ZF} \bigwedge \urcorner$ auf die Form $w = \bigcap$ gebracht, d.h. eine Menge w ($\subseteq \omega$) wird leer, deren Elemente Gödelnummern von ZF-Deduktionen sind, die mit $\bigwedge$ enden. Unter erneuter Verschlüsselung von $\nvdash_{ZF}$ können die metamathematisch für $\nvdash_{ZF} w = \bigcap$ benutzten konstruktiven Schlüsse erst recht in ZF deduziert werden: $\vdash_{ZF} \ulcorner \nvdash_{ZF} w = \bigcap \urcorner$. Bei ZF-Erreichbarkeit einer relativ exorbitanten Ordinalzahl wäre unter anderer Verschlüsselung, welche außer $\vdash_{ZF}$ noch die Umdeutung der ersten Verschlüsselung $w = \bigcap$ umgreift, eine „verkappte" Wf.-ableitbarkeit in ZF deduzierbar: $\vdash_{ZF} \ulcorner \vdash_{ZF} {}^{(\bigwedge)}w = \bigcap \urcorner$.

Die Entzifferung der widersprüchlichen direkten Wf.ableitbarkeit $\vdash_{ZF} w = \bigcap$ scheitert, auch wenn $\vdash_{ZF} {}^{(\bigwedge)}w = \bigcap \leftrightarrow w = \bigcap$, von ZF aus bereits daran, daß das $=$ in ${}^{(\bigwedge)}w = \bigcap$ nicht aus der in $\ulcorner \vdash_{ZF} {}^{(\bigwedge)}w = \bigcap \urcorner$ eingehenden Nummer von $=$ in das $=$ des ZF-Klartextes zurückzuverwandeln ist; denn $=$ ist ja keine Menge, kann also nicht Gegenstand von ZF-Definitionen sein. (Nach nochmaliger Verschlüsselung wäre die „verbotene" finit-direkte Metaentschlüsselung auch wieder in ZF zugänglich.)

$\ulcorner \nvdash_{ZF} w = \bigcap \urcorner$ und $\ulcorner \vdash_{ZF} {}^{(\bigwedge)}w = \bigcap \urcorner$ seien in ZF auf die Form $u = \bigcap$ bzw. $v \neq \bigcap$ gebracht. Der Wf.beweis sollte dann eigentlich ausschließen, daß die Implikation $W \leftrightharpoons v \neq \bigcap \rightarrow u \neq \bigcap$ von ZF aus deduzierbar ist. Verschlüsselt mag $\vdash_{ZF} \ulcorner \nvdash_{ZF} W \urcorner$ und $\vdash_{ZF} \ulcorner \vdash_{ZF} W \urcorner$ deduzierbar sein, dies würde die formale ZF-Widerspruchsfreiheit ZF-intern nicht stören.

Vom finiten Standpunkt aus ist nun $\mathfrak{S}_1$ wieder ein Wortspiel (und auch $\mathfrak{K}_1$ in **1.8** würde nichts weiter sein, obwohl $\mathfrak{K}_1$ finite Inhalte kodifiziert), infolgedessen weiß niemand, inwieweit unsere Intentionen mit ihrer Formalisierung tatsächlich konform gehen. Von vornherein ist deswegen nicht auszuschließen, daß finit-direktes Deduzieren am Ende doch $\vdash_{ZF} W$ ergibt — etwa, weil sich die Verschlüsselungen $\ulcorner . \urcorner$ und $\ulcorner . \urcorner$ hinreichend aufeinander abstimmen lassen.

Um völlige Klarheit über diesen möglichen negativen Aspekt der Wf.theorie zu gewinnen, bei dem es auf genaue Zahl und Steuerung jeder benutzten bzw. einfach oder doppelt verschlüsselt benutzten Primfigur ankommt, muß zuerst der umrissene positive Aspekt entsprechend detailliert ausgearbeitet vorliegen — ein Grund mehr, von Anfang an mit größtmöglicher Präzision vorzugehen.

3.3 *Ausklang.* Eingedenk solcher Präliminarien erscheint die klassische Mathematik eher als eine sekundäre Wahrheit; ganz abgesehen davon, wie sich die in **3.24** skizzierte Situation entwickelt. Wenn aber die Konsistenz der Mengenlehre so zweischneidig ist wie es bei semantischer Explikation der Formeln scheint, indem ein (arithmetischer) Ausschnitt der Mengenlehre gewissermaßen zum Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit hinreichen soll, wie ist dann die in Geometrie und Physik (und Zahlentheorie) erprobte Kraft der klassischen Analysis zu verstehen? Und wie wäre deren scheinbare Wahrheit mit der handfesten Funktionstüchtigkeit unserer technischen Apparatur zu vereinbaren? Wo kann, da vom finiten Stand-

punkt noch nicht ohne weiteres eine direkte Gefahr interner Widersprüche besteht, ein externer Gesichtspunkt aufgezeigt werden, von dem aus die gewohnten analytischen Beschreibungen — unabhängig von der konstruktiven Deutung, die wir $\mathfrak{S}_1$ gegeben haben, und von der Umdeutung, die die Mengenlehre in $\mathfrak{S}_1$ erfährt — auch unmittelbar als sekundär wahr erscheinen.

Da das Symposion unter ein Thema gestellt ist, das Beziehungen zur Naturwissenschaft und Philosophie einschließt, mag es gestattet sein, einen am Schluß des Amsterdamer Vortrags [21] gestreiften Gedanken aufzugreifen und einige Äußerungen zu „dem, was gemeinsam zwischen Geometrie und Physik zu suchen sein könnte", anzuknüpfen.[26]

Die intuitionistische und die konstruktive Kritik an der klassischen Analysis gleiten nach meinem Dafürhalten beide an der Tatsache vorbei, daß der Funktionsbegriff unvermittelt in ein (mutwillig) cartesisch gleichmäßig gedachtes Kontinuum hineingezwängt wird: nur uninteressante Funktionskeime münden nach WEIERSTRASS und RIEMANN nicht in singuläre Punkte, und diese zerstören die Homogenität der Teile eines Kontinuums sowie seine Unzerlegbarkeit im ganzen, auf die es bei BROUWER ankommt.

EINSTEIN fordert zwar Singularitätenfreiheit für die Lösungen von (allgemeinen) Feldgleichungen und beklagt, daß die Mathematik keine Näherungsverfahren bereit hält, die eine Singularitätenfreiheit der entstehenden exakten Lösung garantieren, aber er hat versäumt, zunächst die fundamentale Singularität für $v \geq c$ aufzulösen und von dort den Weg für ein singularitätenfreies Kontinuum zu öffnen.

Versuchen wir, solche funktionalen Verhältnisse zu erfassen, die aus einem geometrisch „elastischen", asymptotisch eingespannten Kontinuum, während es noch im Entstehen begriffen ist, gleichsam organisch hervorgehen, so werden wir anscheinend zur Auffindung physisch bedeutsamer geometrischer Konstruktionsmöglichkeiten angeleitet. [25] schildert in gedrängter Fassung und mehr durch Verweis auf bildliche Darstellungen, wie die beiden Grundphänomene der messenden Physik, Relativität und Komplementarität, im einfachsten Fall als vordergründige Erscheinungen einer rein geometrischen Begriffswelt denkbar wären, die erst dann physikalische Züge annimmt, wenn man die Beschreibung der Teile eines „vollkommenen" Kontinuums von einem einebnenden (statt einbettenden) Meßfeld her aufzäumt. Die dort veranschaulichte Anlage der Definition eines solchen Kontinuums durch Induktion, bei der approximative Prozesse mit geometrisch-kombinatorischen Prozessen zu (nach innen und außen) rückwirkenden Bedingungsformen verwoben sind, muß ständig in der Schwebe gehalten werden, damit sie sich geometrisch ohne Riß und Bruch durchhalten läßt.

Soviel dürfte wenigstens zu erkennen sein: ohne Wert und Notwendigkeit der wissenschaftlichen Arbeit mit intern widerspruchsfreien, aber unanschaulichen Kompromissen anzutasten oder zu schmälern — in der Physik will dies schwerwiegender anmuten als in der Mathematik —, so ist doch zu bezweifeln, daß eine derartige Haltung auf die Dauer den Anspruch erheben kann, aus prinzipiellen Gründen die allein mögliche zu sein; vielmehr wird begriffliche Tieferlegung, die das Alte unter Aufhebung von Totalitätsansprüchen zu bewahren trachtet, unseren Blick von selbst auf neue Erkenntnisse lenken, die sonst unzugänglich geblieben wären.

Es wird freilich Geduld kosten, das Leitmotiv bei der Erarbeitung des Sphärenkalküls $\mathfrak{S}_1$ nochmals zu befolgen und jeden „Teil" im Ansatz beständig auf die

---

[26] Die in [21] angeschnittenen mengentheoretischen Unabhängigkeitsprobleme haben sich dank der Ergebnisse von COHEN 1963 als — vom konstruktiven Standpunkt aus beurteilt — nicht so tief liegend erwiesen wie ich damals dachte.

„Ganzheit" der Denkmöglichkeiten einer Wissenschaft auszubalancieren, soweit es die Tendenz der Systematik angeht, die nach ihrem gegenwärtigen Selbstverständnis das Fazit ihrer bisherigen historischen Entwicklung zieht. Ich bin jedoch optimistisch genug, zu glauben, daß es menschenmöglich ist, nicht nur über unsere eigenen Denkmittel endgültig Rechenschaft abzulegen, sondern auch den theoretischen Extrakt der Daten unserer eigenen Meßwerkzeuge zu durchschauen — bei der Dimensionszahl von Raum und Zeit sowie der Signatur der Metrik im Meßfeld angefangen —, statt sie als Fakten anzuerkennen, die sich einem Zugriff der reinen Mathematik auf immer entziehen.

Sollte der formale Extrakt einiger mathematischer Disziplinen — die hier von mir vertretene konstruktive Arithmetik keineswegs ausgenommen — wirklich von einer „paradoxen" Widerspruchsfreiheit sein, die je nach formalem Beweisverlauf und formaler Definitionsverwicklung zu einem Widerspruch umschlagen kann, so erblicke ich darin kein Unglück. Im Gegenteil: wenn das statische Bewußtsein vom Wahren in der Mathematik nach so geraumer Zeit noch einmal in Bewegung geriete, dann wäre dies ein Zeichen für eine überwältigende Spannkraft und Regenerationsfähigkeit der exakten Wissenschaft vom Unendlichen; und durch Widerspiegelung des 'Unendlichen' im Endlichen würden dann unerhörte Harmonien der natürlichen Zahl in Erscheinung treten, deren Einfluß auf eine finit-arithmetische (logik- und analysisfreie) Geometrie heute kaum jemand im voraus zu erahnen weiß.

Zumindest erwächst uns gegenwärtig die Aufgabe, eine kritische Selbstbesinnung auf die exakte Methode anzustreben — mit dem Ziel einer finiten Selbstverwirklichung der Mathematik.

Nachtrag

Während zweier Tagungen, die im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach stattfanden, ergab sich in der Woche vom 30. III. bis 7. IV. 1967 Gelegenheit, mit Professor BERNAYS einige Ausschnitte dieser Arbeit zu besprechen. Daraufhin sei um größerer Klarheit willen folgendes nachgetragen.

1. Die Stellenzahl der Prädikate $\vee$ und $\wedge$ läßt sich mit notieren. Dazu ersetze man die Regeln 9.1.2, 3 durch die Regeln ${}_{k}\mathrm{w} \rightarrow {}_{P}\mathrm{w}\,{}^{\cup}\mathrm{w}\vee$, ${}_{P}\mathrm{w}\,{}^{\cup}\mathrm{w}\wedge$. Bei dieser Fassung werde anstelle ${}^{\cup}\mathrm{k}\vee$, ${}^{\cup}\mathrm{k}\wedge$ inoffiziell ${}^{k}\vee$, ${}^{k}\wedge$ geschrieben. Dann hat man ${}^{\cup}\wedge\circ$ in 9.3.11, 18, 22 und ${}^{\cup}\vee\circ$ in 9.3.12, 17, 19 durch ${}^{\cup\cup}0\wedge\circ$ bzw. ${}^{\cup\cup}0\vee\circ$ zu ersetzen.

Die 4 Regeln 9.3.11, 18 und 9.3.12, 17 lassen sich zu 2 Regeln zusammenziehen: ${}_{\cup}{}^{*}{}_{k}\mathrm{wv}$, ${}_{A}\mathrm{u} \rightarrow {}_{\angle}{}^{\cup\cup}\mathrm{w}\wedge\mathrm{vu}$, ${}_{\angle}\mathrm{u}\,{}^{\cup\cup}\mathrm{w}\vee\mathrm{v}$.

Es ist nicht möglich, den Relator ${}_{2}$ auf den Relator ${}_{+}$ zu reduzieren. Versucht man, $\circ$ (*κενόν*) wegzulassen und mit natürlichen Zahlen zu arbeiten, die bei 1 statt bei 0 anfangen, so müßte man 0-stellige Prädikatschemata (wie etwa die in (D2), (${}^{\cap}$D2) unter **2.311** relativ explizit definierten) durch besondere, von 9.1.5 und 9.3.24, 25 getrennte Regeln als Aussageschemata einführen und den implikativen Umgang mit ihnen gesondert postulieren — sie sind ja im relativen Fall nicht auf dem Wege von Abkürzungskonventionen zu beseitigen.

2. Ohne Durchführung der Elimination von ι-Termen bietet $\mathfrak{S}_1$ keinen Ausdruck für Terme wie $\mathrm{x} + \mathrm{y}$. Die Aussageform $+\mathrm{xyz}$ läßt

sich mit folgendem Ausdruck für das 3-stellige (absolut unbedingt definierte) Prädikat $+$ gewinnen:

$$+ \leftrightharpoons ((\vee)^3 \vee R_+ \rightarrow \pi x y z\, (y = 0 \wedge x = z \,\dot{\vee}\, \bigvee_{\substack{y_0 \\ y = 'y_0}} \bigvee_{\substack{z_0 \\ z = 'z_0}} \pi x y_0 z_0)),$$

worin

$$R_+ \leftrightharpoons ((\vee)^6 \vee {}^{12}\wedge \rightarrow \rho x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2\, (x_1 = x_2 \wedge 'y_1 = y_2 \wedge 'z_1 = z_2)).$$

Zur Legitimation dieses Ausdrucks von der Form

$$+ \leftrightharpoons ((\vee)^3 \vee R_+ \rightarrow \pi x y z\, A_+(x, y, z; \pi)),$$

worin R_+ von der Form $((\vee)^6 \vee {}^{12}\wedge \rightarrow \rho \overset{6}{x}\, B(\overset{6}{x}))$ ist, muß vorher $\vdash I({}^6\vee, {}^{12}\wedge)$ und $\vdash I({}^3\vee, R_+)$ deduziert werden, ferner

$$\vdash \wedge \overset{6}{y}\, ({}^{12}\wedge \overset{6}{y}\, \overset{6}{x} \,\dot{\rightarrow}\, \pi_1 \overset{6}{y} \leftrightarrow \pi_2 \overset{6}{y}) \,\dot{\rightarrow}\, B(\overset{6}{x}) \leftrightarrow B(\overset{6}{x})$$

und

$$\vdash \wedge x_1 y_1 z_1 (R_+ x_1 y_1 z_1 x y z \,\dot{\rightarrow}\, \pi_1 x_1 y_1 z_1 \leftrightarrow \pi_2 x_1 y_1 z_1) \,\dot{\rightarrow}$$
$$\dot{\rightarrow}\, A_+(x, y, z; \pi_1) \leftrightarrow A_+(x, y, z; \pi_2).$$

Die dritte Deduktion ist trivial. Die vierte Deduktion ergibt sich unter Berücksichtigung von $y = 0 \vee \bigvee y_0\, y = 'y_0 \,\dot{\wedge}\, z = 0 \vee \bigvee z_0\, z = 'z_0$; dabei ist ein Rückgriff auf das $\dot{\rightarrow}$-Antezedens nur im Fall $\bigvee y_0\, y = 'y_0 \wedge \wedge \bigvee z_0\, z = 'z_0$ nötig. Die erste Deduktion ist einfach: es gilt $\wedge \overset{6}{x}\, ({}^{12}\wedge \overset{6}{x}\, \overset{6}{x}_0 \rightarrow \rightarrow \pi \overset{6}{x})$, so daß $\wedge \overset{6}{x}_0 (\vee \rightarrow \pi \overset{6}{x}_0) \rightarrow \pi \overset{6}{x}$ zu zeigen bleibt; 9.3.15 liefert $\wedge \overset{6}{x}_0 (\vee \rightarrow \pi \overset{6}{x}_0) \,\dot{\rightarrow}\, \vee \rightarrow \pi \overset{6}{x}$, und mit 9.3.10 reicht dann $D \wedge \vee \leftrightarrow D$ hin. Die zweite Deduktion ergibt sich nach Reduktion auf

$$(*) \qquad \vdash \wedge y_0 (\wedge y ('y = y_0 \rightarrow \rho y) \rightarrow \rho y_0) \rightarrow \rho y$$

(wie bei (o 1) unter **2.32**) durch formale Induktion nach y. In der Tat gilt $'y = y_0 \rightarrow \wedge x \wedge z\, \pi x y z \,\dot{\rightarrow}\, x = x_0 \wedge 'y = y_0 \wedge 'z = z_0 \rightarrow \pi x y z$, also auch $\wedge_{x_0 y_0 z_0} \wedge_{xyz}\, x = x_0 \wedge 'y = y_0 \wedge 'z = z_0 \rightarrow \pi x y z. \rightarrow \pi x_0 y_0 z_0 \,\dot{\rightarrow}\, \dot{\rightarrow}\, \wedge_y 'y = y_0 \rightarrow \wedge x \wedge z\, \pi x y z. \rightarrow \wedge x \wedge z\, \pi x y_0 z$ und folglich $I({}^3\vee, R_+)$ aus (*). Induktion für (*) nach y: der Induktionsanfang ergibt sich wegen $\wedge y ('y = 0 \rightarrow \rho y)$ aus $\wedge y_0 (\wedge y ('y = y_0 \rightarrow \rho y) \rightarrow \rho y_0) \,\dot{\rightarrow}\, \vee \rightarrow \rho 0$; der Induktionsschritt $\wedge y_0 * \rightarrow \rho y_1 \,\dot{\rightarrow}\, \wedge y_0 * \rightarrow \rho' y_1$ beginnt mit $\wedge y_0 * \,\dot{\rightarrow}\, \wedge y ('y = 'y_1 \rightarrow \rho y) \rightarrow \rho' y_1$, wonach aus $\wedge y_0 *$ und ρy_1 (wegen $'y = 'y_1 \leftrightarrow y = y_1$) zunächst $\rho' y_1$ folgt — dies ist dann auf $D_1 \,\dot{\rightarrow}\, D_2 \rightarrow D_3 \,\ddot{\rightarrow}\, D_1 \rightarrow D_2 \,\dot{\rightarrow}\, D_1 \rightarrow D_3$ für $D_1 \leftrightharpoons \wedge y_0 *$, $D_2 \leftrightharpoons \rho y_1$, $D_3 \leftrightharpoons \rho' y_1$ anzuwenden.

3. Aus der Notation $(CPR \rightarrow \pi \overset{k}{x} A)$ geht nicht hervor, für welche Variablentupel $\overset{k}{z}\, \overset{k}{y}$ die Deduktionen von (1), (2) laut **1.632** geführt worden sind und für welche Marken ρ, π_1, π_2, obwohl diese Angaben in die Prämissen von 9.1.5 eingehen. Im Extremfall würde sich anbieten, die Deduktionen $\vdash_{\mathfrak{S}_1}(1)$, $\vdash_{\mathfrak{S}_1}(2)$ selbst als aufweispflichtige Argumente eines Rekursors einzuführen. Aus [14] S. 101—104 ist zu entnehmen,

daß und wie man Ableitungen nach einem Kalkül in einem neuen, mit einem etwas umfassenderen Alphabet arbeitenden Kalkül herstellen kann. Für $\mathfrak{S}_1$ empfiehlt sich, die beim Aufbau von Ableitungs-Stammbäumen benutzten Regeln und Einsetzungen für Wortmitteilungen der Eindeutigkeit halber mit einzukalkulieren; ein Rekursor $(\mathrm{d}_{(1)}\,\mathrm{d}_{(2)} \twoheadrightarrow \pi\,\overset{k}{\mathrm{x}}\,\mathrm{A})$ würde natürlich den Kalkül für die $\mathfrak{S}_1$-Ableitungen mit $\mathfrak{S}_1$ selber verflechten.

Weil die in $\mathrm{d}_{(1)}$, $\mathrm{d}_{(2)}$ frei vorkommenden Variablen und Marken nur insoweit für $(\mathrm{d}_{(1)}\,\mathrm{d}_{(2)} \twoheadrightarrow \pi\,\overset{k}{\mathrm{x}}\,\mathrm{A})$ relevant sind, als sie in C, P, R und A aus (1), (2) frei vorkommen, ist unter die Hilfsbegriffe dabei auch das Tupel der in einem Prädikat- bzw. Aussageschema frei vorkommenden Variablen wie Marken aufzunehmen. $\twoheadrightarrow$ bindet π und x wieder ausschließlich in A, und die Regeln zur Umbenennung von π, x auf kongruente Rekursifikationen fließen aus (3) bzw. 9.3.24, 25. Im Fall $\twoheadrightarrow$ ist nicht nur die bisubjunktive Unabhängigkeit des rekursiv definierten Prädikats von der Fundierung zu zeigen (wie bei Theorem 1, **2.11**), sondern auch die von $\mathrm{d}_{(1)}$ und $\mathrm{d}_{(2)}$. Derlei Unabhängigkeiten, die sich hinterher im formalen Zusammenhang herausstellen, machen aber diejenigen (figürlich-wortmäßigen) Abhängigkeiten nicht rückgängig, welche mit der ursprünglich eingeführten Setzung einmal verbunden und notiert sind.

Bemerkenswerterweise wird der Prädikatbegriff in $\mathfrak{S}_1$ beim Überwechseln von $\rightarrow$ zu $\twoheadrightarrow$ „direkt" entscheidbar (in jenem Sinn, der unter 1., 2. im letzten Satz von **1.2** erwähnt ist).

4. Zur dialogischen Deutung ziehe man außer [14] noch den Anhang der 3. Auflage von Lorenzens Göschenband „Formale Logik" (Berlin 1967, S. 160—176) heran und die unabhängig lesbare Auslegung von W. Stegmüller in Notre Dame Journal of Formal Logic V (1964), p. 81—112.

Zusatz. Im Zusammenhang mit meinem Vortrag „Widersprüche in der axiomatischen Mengenlehre aufgrund eines systeminternen Widerspruchsfreiheitsbeweises für eine formalisierte ordinalzahltheoretische Analysis" am 3. April 1968 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach wurde ich privat auf imprädikative Definitionsmöglichkeiten im System $\mathfrak{S}_1$ hingewiesen. Diese sind jedoch keineswegs gravierend, denn die Rechnungen und Überlegungen unter **2.***** und **3.**** funktionieren ebensogut (: vgl. **1.52**) bei folgender Verschärfung in den Prämissen der Hauptregel 9.1.5:

ersetze die 6. Prämisse durch ${}_{-A}\mathrm{u}$.

Für den 5. einstelligen Relator ${}_{-A}$ sind 6 Regeln hinzuzufügen:

9.4.1 $\quad {}_{\cup^{*k}}\mathrm{w}\,\mathrm{v},\ {}_{P}\mathrm{w}\,\mathrm{u} \rightarrow {}_{-A}{}^{\cup}\mathrm{u}\,\mathrm{v}$;

9.4.2, 3, 4 $\quad {}_{-A}\mathrm{u},\ {}_{-A}\mathrm{v} \rightarrow {}_{-A}{}^{\rightarrow}\mathrm{u}\,\mathrm{v},\ {}_{-A}{}^{\wedge}\mathrm{u}\,\mathrm{v},\ {}_{-A}{}^{\vee}\mathrm{u}\,\mathrm{v}$;

9.4.5, 6 $\quad {}_{x}\mathrm{v},\ {}_{-A}\mathrm{u} \rightarrow {}_{-A}{}^{\bigvee}\mathrm{v}\,\mathrm{u},\ {}_{-A}{}^{\bigwedge}\mathrm{v}\,\mathrm{u}$.

Intendierte Deutung von $_{-A}$w: w ist Aussageschema über Grundzahlen ohne Prädikatquantifikation.

Quantoren mit Prädikatmarken dienen hiernach innerhalb des Wirkungsstücks eines Rekursors nicht zum logischen Aufbau, eventuell indes zum definitorischen Aufbau (und zwar zum logischen Aufbau der C in den CPR vor Rekursoren). Diese Maßnahme schaltet „generalized inductive definitions" aus.

Als Regelzahl des Sphärenkalküls $\mathfrak{S}_1$ ergibt sich nun 97 (und 129 für die in **1.2** erwähnte Neufassung): laut *1.* sind 2 Regeln unter 9.3. eingespart, und bei Hinzufügung von

9.2.0 $$_{-A}\mathrm{u} \rightarrow {}_{A}\mathrm{u}$$

entfallen 9.2.1 — 6 dank 9.4.1 — 6.

Literatur

1. BERNAYS, P.: A system of axiomatic set theory. JSL **2**, 65—77 (1937); **6**, 1—17 (1941); **7**, 65—89, 133—145 (1942); **8**, 89—106 (1943); **13**, 65—79 (1948); **19**, 81—96 (1954).
2. — and A. A. FRAENKEL: Axiomatic set theory. Amsterdam 1958/63.
3. DEDEKIND, R.: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888.
4. GENTZEN, G.: Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Annalen **112**, 493—565 (1936).
5. GÖDEL, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte Math. Phys. **38**, 173—198 (1931).
6. — The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. Ann. Math. Studies **3**, Princeton 1940/51/53/58/61.
7. — Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica **12**, 280—287 (1958).
8. HEYTING, A.: Some remarks on intuitionism. Constructivity in mathematics, Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam 1957, pp. 69—71. Amsterdam 1959.
9. HILBERT, D.: Über das Unendliche. Math. Annalen **95**, 161—190 (1926).
10. — u. P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik. Berlin 1934 (Bd. I), 1939 (Bd. II).
11. KLEENE, S. C.: Introduction to metamathematics. Amsterdam, Groningen 1952/59.
12. — and R. E. VESLEY: The foundations of intuitionistic mathematics. Amsterdam 1965.
13. LORENZEN, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin Göttingen-Heidelberg 1955.

13a. Referat zu [13] in Zbl. Math. **66**, 248—254 (1957).

14. LORENZEN, P.: Metamathematik. Mannheim 1962.
15. — Differential und Integral. Frankfurt a. M. 1965.
16. PÉTER, RÓZSA: Rekursive Funktionen. Budapest 1951/57.
17. SCHÜTTE, K.: Beweistheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

18. SPECTOR, C.: Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. Recursive function theory. Proc. Symposia Pure Math. 5, Amer. Math. Soc., pp. 1—27. Providence R. I. 1962.
19. TAKEUTI, G.: Construction of the set theory from the theory of ordinal numbers. J. Math. Soc. Japan **6**, 196—220 (1954).
20. — A formalization of the theory of ordinal numbers. JSL **30**, 295—317 (1965).
21. WETTE, E.: Von operativen Modellen der axiomatischen Mengenlehre. Constructivity in mathematics, Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam 1957 (hrsg. von A. HEYTING), pp. 266—277. Amsterdam 1959. Druckfehler: S. 267, Zeile 36: stadium; S. 273, Zeile 22: Beweismittel; S. 275, Zeile 4: pflügten; S. 276, Zeile 10: $\geq$ anstelle des unteren $\leq$; Zeile 24: Zahlen.
22. — Intuitionistisch-rekursiver Konsistenzbeweis für die axiomatische Mengenlehre. International Congress for logic, methodology and philosophy of science. Abstracts of contributed papers, pp. 31—33. Stanford 1960. Druckfehler: S. 31, Zeile 16 heißt 'letztere angewendet auf logisch-rekursive'; Zeile 18 heißt 'Logik, Vorgängerinduktion für $<$, Totalordnungseigenschaften von $\leq$ und Rekursionsaxiomschema für Relatoren $\rightarrow_{\pi(\overset{m}{\xi})}{}^{*}\mathfrak{A}$'; S. 32, Zeile 3: W_ζ anstelle W_ξ.
23. — Intuitionistic-recursive consistency proof for the axiomatic set theory. (Unveröffentlichter Text des Vortrags gemäß Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford 1962 (hrsg. von E. NAGEL, P. SUPPES u. A. TARSKI), p. 658.)
24. — Eine Anmerkung zu GÖDELS Komprehensionstheorem. Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung **9**, 59—60 (1967).
25. — On the mathematical and the physical aspects of the continuum problem. (Abriß: XI Congrès international d'histoire des sciences, Warszawa-Kraków 1965, Sommaires p. 167. Druckfehler: Zeile 23: we anstelle w; Zeile 25: $\rightarrow$ zwischen $2 = 2$ und $1 = 1$.) Actes du XIe Congrès International d'Histoire des Sciences, vol. III, pp. 283—293 (incl. 10 fig.). Ossolineum, Wrocław 1968. Errata: p. 284 below: exchange [1] and [2]; note [1]: spheres, $\sum_\eta$; note [4]: $[c] \sim 1 = s^0 \sim [h]$, $\sim s^{-2} \sim$ Gaussian curvature K; note [10]: expanding/straining.
26. WEYL, H.: Mathematics and logic. A brief survey serving as a preface to a review of "The Philosophy of Bertrand Russell". Amer. math. monthly **53**, 2—13 (1946).
27. Selecta HERMANN WEYL. Basel und Stuttgart 1956.